

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ISCTE
INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE FINANÇAS



**Ciências
ULisboa**

ISCTE  **IUL**
Instituto Universitário de Lisboa

Modelos de *spread* de crédito com volatilidade não constante

Rita de Sousa Ramalho

Mestrado em Matemática Financeira

Dissertação orientada por:
Professor Doutor José Carlos Gonçalves Dias

Agradecimentos

Queria começar por agradecer ao meu orientador, professor José Carlos Gonçalves Dias, por toda a paciência despendida durante todo este processo e por todos os conselhos dados de modo a que pudesse melhorar esta dissertação. Ao professor Luís Sequeira pelas luzes inicialmente dadas relativamente à parte de programação.

Aos meus pais, Maria Alexandra e Carlos Ramalho, e à minha irmã, Lara Ramalho, um grande obrigado por me terem ouvido durante todo este tempo e por terem partilho comigo todas as vitórias e dado força nos tempos mais difíceis.

Ao meu parceiro, Nuno Soares, agradeço todo o apoio, carinho, força e ajuda que me deu, por nunca me ter deixado baixar os braços ou duvidar das minhas capacidades.

Às minhas grandes amigas do peito, Andreia Pires e Cristiana Almeida, por toda a amizade, por termos partilhado toda esta caminhada e por terem estado sempre bem perto de mim. Ao Iulian Capcelea por me demonstrar que, mesmo estando longe, posso contar sempre com ele.

À minha colega de trabalho e amiga Beatriz Fidalgo pelo apoio e incentivo mútuo para que esta etapa fosse concluída.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo apresentar as soluções de fórmula fechada da estrutura de capital de uma empresa cuja dívida segue um processo *roll over*. Este processo torna-se o ponto chave deste estudo, uma vez que é a solução encontrada para que seja possível a derivação das fórmulas de preços de obrigações com risco de *default* cujas obrigações assumem uma maturidade arbitrária.

Numa primeira análise, serão apresentadas as fórmulas fechadas para os diversos componentes assumindo que o valor dos ativos de uma empresa segue o processo *Geometric Brownian Motion* (GBM). Posteriormente, serão apresentadas as mesmas assumindo o processo *Constant Elasticity of Variance* (CEV).

Os dois processos foram comparados entre si através da implementação numérica em *Python 3.6*, cujos resultados e conclusões serão discutidos no final da presente dissertação.

Palavras-Chave: *Constant Elasticity of Variance*; Risco de *Default*; Processo *roll over*; *Spread* de Crédito;

Abstract

The goal of this thesis is to present the closed-form solutions of a company's capital structure whose debt follows a roll over process. This process becomes the key point of this study, since it is the solution found to make it possible to derive the bond price formulas with default risk whose bonds assume an arbitrary maturity.

In a first analysis, the formulas for the various components will be presented assuming that the value of a company's assets follows the Geometric Brownian Motion (GBM) process. Subsequently, the same formulas will be presented assuming the Constant Elasticity of Variance (CEV) process.

The two processes were compared to each other through the numerical implementation done in Python 3.6, whose results and conclusions will be discussed at the end of this thesis.

Keywords: Constant Elasticity of Variance; Default Risk; Roll over process; Credit Spread;

Índice

Agradecimentos	I
Resumo	II
Abstract.....	III
Índice de Figuras	VI
Índice de Tabelas	VII
1. Introdução.....	1
2. Modelo <i>Geometric Brownian Motion</i> (GBM).....	4
2.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Leland (1994b)	5
a. Abordagem à política de estacionariedade da dívida	5
b. Avaliação da Dívida Total assumindo o Modelo GBM	6
c. Avaliação do Valor Total de uma Empresa assumindo o Modelo GBM	8
d. Avaliação do Capital Próprio assumindo o Modelo GBM.....	8
e. Expressão do valor que desencadeia a falência assumindo o Modelo GBM.....	9
2.2. Estrutura da dívida estacionária baseada em Davydov e Linetsky (2001)	10
3. Modelo <i>Constant Elasticity of Variance</i> (CEV).....	14
3.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Perrakis e Zhong (2015)	16
a. Avaliação da Dívida Total assumindo o Modelo CEV	17
b. Avaliação do Capital Próprio assumindo o Modelo CEV	22
c. Avaliação do Valor Total de uma Empresa assumindo o Modelo CEV	23
d. Expressão do valor que desencadeia a falência assumindo o Modelo CEV.....	23
4. Análise Numérica	28
a. Barreira de <i>default</i> determinada endogenamente	28
b. <i>Spread</i> de crédito.....	31
c. Estrutura ótima de capital.....	33
5. Conclusão	38
Referências Bibliográficas.....	39
Anexos.....	41
A. Demonstração da equação (2.39).....	41
B. Demonstração do Lema 3	43
C. Código em <i>Python</i> 3.6 (<i>Spyder</i>).....	72
C.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Leland (1994b)	72
a. Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa.....	72
b. Figura 4.1.....	73
c. Figura 4.2.....	75
d. Figura 4.3.....	76
e. Tabela 4.1 Painel B, Tabela 4.2 e Tabela D.1	77

f.	Tabela 4.1 Painel A	79
g.	Tabela 4.3	81
C.2.	Estrutura da dívida estacionária baseada em Davydov e Linetsky (2001).....	83
a.	Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa.....	83
b.	Figura 4.1.....	85
c.	Figura 4.2.....	86
d.	Figura 4.3.....	87
e.	Tabela 4.1 Painel B, Tabela 4.2 e Tabela D.1.....	88
f.	Tabela 4.1 Painel A	90
g.	Tabela 4.3	92
C.3.	Estrutura da dívida estacionária baseada em Perrakis e Zhong (2015).....	94
a.	Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa.....	94
b.	Figura 4.1.....	100
c.	Figura 4.2.....	102
d.	Figura 4.3.....	106
e.	Tabela 4.1 Painel B e Tabela 4.2	109
f.	Tabela 4.1 Painel A	112
g.	Tabela 4.3	113
D.	Valor do cupão para o caso de $\beta = 0$	117

Índice de Figuras

Figura 4.1: Barreira de <i>default</i> endógena em função da maturidade média da dívida.....	29
Figura 4.2: Barreira de <i>default</i> endógena em função do rácio de alavancagem para $T = \{5, 20\}$	31
Figura 4.3: Valor total de uma empresa em função do rácio de alavancagem para $T = \{1, 10, 20\}$.	35

Índice de Tabelas

Tabela 4.1: <i>Spread</i> de crédito em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$	32
Tabela 4.2: Barreira de <i>default</i> determinada endogenamente em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$	33
Tabela 4.3: Características ótimas de empresas alavancadas para $T = \{1, 5, 10, \infty\}$	37
Tabela D.1: Valor do cupão para o caso de $\beta = 0$ quando a barreira de <i>default</i> é determinada endogenamente, em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$...	117

1. Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar as soluções de fórmula fechada para a estrutura de capital de uma empresa adotando os processos *Geometric Brownian Motion* (GBM) e *Constant Elasticity of Variance* (CEV) e sobre o pressuposto de que a dívida segue uma estrutura estacionária. Numa fase final, depois das soluções anteriormente referidas terem sido apresentadas para ambos os processos e comparadas entre si, surge a determinação e comparação dos valores de *spread* de crédito tendo em conta os dois processos de difusão acima mencionados.

A estrutura de capital de uma empresa assenta na combinação de capital próprio e dívida, cuja soma destes dois componentes é designada como sendo o valor total detido por uma empresa. O capital próprio pode ser refletido na forma de ações preferenciais, ações ordinárias e/ou lucros retidos, enquanto que a dívida se reflete a partir da emissão de obrigações e/ou de empréstimos. A estrutura de capital diz-se ótima quando uma empresa que se financia a partir destes dois componentes consegue não só maximizar o seu valor de mercado como minimizar os seus custos de capital. Quando uma empresa deixa de conseguir fazer face ao pagamento das suas dívidas obrigacionistas, entra em *default*.

Em 1958, Modigliani e Miller, pioneiros no estudo da estrutura de capital de uma empresa, começam por demonstrar que o valor de uma empresa é independente do modo como esta se financia, isto é, uma empresa alavancada – que se financia a partir de dívida e capital próprio – teria o mesmo valor que uma empresa não alavancada – que se financia apenas a partir de capital próprio. Porém, mais tarde, devido a Modigliani e Miller (1963) introduzirem os impostos sobre os lucros corporativos na estrutura de capital, a igualdade de valores anteriormente referida altera-se, ou seja, uma empresa que se financia pela emissão de dívida, obterá um valor total superior a uma empresa que se financia apenas pela emissão de capital próprio. Isto acontece pela simples razão de que ao contrário dos dividendos, os juros são dedutíveis.

O modelo de avaliação de opções europeias de Black e Scholes (1973) veio revolucionar o mundo dos mercados financeiros e continua a ser não só uma inspiração, como também um ponto de partida para estudos de grande notoriedade. Nesse mesmo ano, Merton (1973) não só generalizou o modelo de avaliação de Black e Scholes (1973) ao introduzir os dividendos e as taxas de juro estocásticas, como em 1974 fez também recurso a este mesmo modelo para demonstrar a sua aplicabilidade à estrutura de capital de uma empresa, ao assumir que o valor do capital próprio pode ser analisado como sendo uma *European call option*¹ e a dívida como uma obrigação de cupão zero. Nessa mesma análise, aborda a temática do risco na estrutura de taxas de juro, tornando-se assim o primeiro a derivar valores para uma dívida com risco. Esta estrutura assenta na ideia de que quando as empresas se financiam a partir de dívida, devem compensar os seus credores quanto à incerteza de pagamento. Assim sendo, para além da taxa de juro sem risco, é exigido o pagamento de um valor proporcional à da probabilidade da empresa entrar em *default* – que em Merton (1974) acontece caso o valor dos ativos da empresa seja inferior ao valor nominal da dívida na data de maturidade. Esta taxa adicional paga aos credores é denominada de *spread* e é calculada a partir da diferença entre uma obrigação com risco e uma obrigação sem risco (por exemplo, uma obrigação de tesouro).

Black e Cox (1976) distingue-se do modelo anteriormente apresentado por Merton não só pela introdução de obrigações com pagamento de cupão, como também por analisar a dívida como sendo perpétua. Esta última premissa torna-se importante no desenvolvimento do estudo da estrutura de capital, uma vez que o *default* passa a poder ocorrer a qualquer instante no tempo – baseando-se no efeito de

¹ Contrato financeiro que dá o direito, mas não o dever de comprar um ativo financeiro numa data futura a um preço pré-estabelecido. Na data de maturidade, a opção é exercida caso o valor do ativo subjacente seja superior ao valor pré-estabelecido (designado como o preço de exercício).

primeira passagem, este momento acontece no exato instante em que o valor dos ativos de uma empresa se iguala ao valor que desencadeia a falência. O valor que despoleta a falência de uma empresa é analisado como sendo uma barreira de *default* que pode ser determinada exogenamente ou endogenamente. Merton (1974), Longstaff e Schwartz (1995) e Huang e Huang (2002) estudaram a barreira como sendo exógena, já Black e Cox (1976) foi o pioneiro ao analisar a barreira como sendo determinada endogenamente, cuja determinação deste valor fica à responsabilidade da empresa e surge como uma maximização do valor de capital próprio.

O estudo de Leland (1994a) surge como uma extensão do modelo de Black e Cox (1976) não só por incluir os benefícios fiscais e os custos de falência na determinação do valor da dívida, como também por determinar as soluções de fórmulas fechadas da estrutura de capital tendo em consideração os dois ambientes distintos na determinação da barreira de *default*, isto é, que tanto pode ser analisada exogenamente – e a dívida é considerada protegida – como também analisada endogenamente – e a dívida é considerada desprotegida. Nesse mesmo ano, Leland (1994b) apresenta um modelo que se torna o ponto chave do estudo da presente dissertação, começando por considerar que o pagamento de *cash flows* da dívida é constante ao longo do tempo. Esta consideração levanta problemas quando aplicadas à análise de uma dívida com maturidade finita, cuja solução de Leland (1994b) assenta num *roll over* da dívida – que no mundo real se compara à utilização de um *sinking fund provision*². O processo *roll over* assume que uma dívida após ser emitida, irá vencer parte dela anualmente a uma taxa de amortização inversamente proporcional à maturidade média e emitida outra no seu lugar com as mesmas características de modo a substituir a parte que se venceu. Este processo é considerado como sendo estacionário, uma vez que o valor nominal da dívida total e o cupão total se mantêm constantes ao longo do tempo e só termina caso ocorra o *default*. Em Leland e Toft (1996), a abordagem é a mesma que em Leland (1994b) mas aplicada à análise de uma dívida com maturidade finita – distinguindo-se assim dos estudos anteriores de Leland (1994a,b) ao analisarem a dívida com maturidade infinita – cujo objeto de estudo assenta na escolha não só do montante de dívida como da sua maturidade, apresentando as consequências das diferentes escolhas na avaliação de obrigações.

Todos os estudos mencionados até este ponto têm um elemento em comum ao assumirem que o valor dos ativos de uma empresa segue um *Geometric Brownian Motion*, isto é, todos eles assumem que o valor do ativo subjacente³ segue um processo de difusão *lognormal*, cuja trajetória é aleatória ao longo do tempo com um dado retorno esperado e um *drift* constante. Apesar deste modelo ter revolucionado os mercados financeiros, muitos estudos empíricos comprovam que este processo não reflete na totalidade aquilo que se passa nos mercados, como por exemplo o facto de existir uma correlação negativa entre o preço de um ativo subjacente e a sua volatilidade. Embora tudo aponte para que Black (1975) tenha sido o primeiro a aperceber-se de que o modelo não capturava esta correlação, foi em Cox e Ross (1976) que as implicações desta falha foram apresentadas, nomeadamente, a incapacidade do modelo refletir a *implied volatility smile* ou *skew* (isto é, a volatilidade como uma função convexa e monotonamente decrescente em relação ao preço de exercício de uma opção) que se observa na avaliação de opções. Em 1996, Cox vem dar resposta à problemática levantada pelo modelo GBM com a introdução do modelo *Constant Elasticity of Variance* (CEV). Este modelo passa a refletir a *implied volatility smile*, uma vez que assenta na hipótese de que a elasticidade da variância é dependente do valor do ativo subjacente. Para além disso, consegue ser consistente com o *leverage effect* (efeito alavanca), isto é, consegue demonstrar que o preço do ativo subjacente está negativamente correlacionado com as variações da volatilidade.

² Fundo reservado ao pagamento de um título ou empréstimo contraído em que o devedor paga periodicamente cotas de amortização – que redem juros ao longo dos anos – com o intuito de que na data de vencimento do empréstimo, o saldo da conta do fundo seja igual ao montante do empréstimo contraído.

³ Nesta dissertação é analisado como sendo o valor dos ativos de uma empresa não alavancada.

O estudo da presente dissertação será sobretudo incidido sobre o artigo de Perrakis e Zhong (2015), que visa apresentar as soluções analíticas da estrutura de capital seguindo as ideologias de Leland (1994b) – ao assumir que a dívida segue uma estrutura estacionária – mas, divergindo no processo de difusão utilizado à partida, isto é, ao invés de assumir que o valor dos ativos de uma empresa segue o processo GBM, Perrakis e Zhong (2015) assume que o valor dos ativos segue o processo CEV. A análise de Davydov e Linetsky (2001) que assenta na avaliação de *lookback options*⁴ e de opções barreira⁵ – começa por assumir que o ativo subjacente segue o processo GBM mas apresenta também a alternativa para o caso deste seguir o processo CEV – também será uma mais valia em todo este processo, uma vez que a barreira de *default* pode ser comparada à barreira de uma *down-and-out call*⁶.

Esta dissertação está organizada do seguinte modo: no Capítulo 2 será apresentado o processo GBM, as suas características e como é que este processo influencia a determinação das fórmulas fechadas apresentadas em Leland (1994b). Ainda neste capítulo é apresentada uma alternativa às soluções propostas em Leland (1994b) – ainda que assumindo a estacionariedade da dívida, mas cuja função de densidade de probabilidade da função normal dá lugar às soluções únicas da equação diferencial ordinária de Black e Scholes apresentadas em Davydov e Linetsky (2001). No Capítulo 3 é descrito o processo CEV assim como as suas características e que, posteriormente aliado ao estudo da estrutura de capital de uma empresa apresentada em Leland (1994b) culminará na análise apresentada em Perrakis e Zhong (2015). No Capítulo 4, é apresentada a análise numérica tendo como objetivo a comparação da performance dos processos de difusão explicados anteriormente nos Capítulos 2 e 3. As conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 5.

⁴ Contrato financeiro que confere o direito de comprar um ativo financeiro ao seu preço mínimo registado, caso se trate de uma *lookback call option*, ou vender um ativo ao seu preço máximo, caso se trate de uma *lookback put option*.

⁵ Assemelha-se a uma opção *standard* cujos *payoffs* podem diferir, uma vez que neste contrato o *payoff* fica dependente do valor do ativo tocar ou não numa barreira pré-especificada durante o período de vida da opção.

⁶ Contrato semelhante a uma *European call option* com a particularidade de ser cancelado no primeiro instante em que o valor do ativo subjacente toque numa barreira inferior pré-especificada.

2. Modelo *Geometric Brownian Motion* (GBM)

O modelo de avaliação de opções é um grande marco na história dos mercados financeiros alcançado por Black e Scholes (1973), cujo estudo assenta num modelo teórico de equilíbrio geral para a avaliação de opções, derivando a fórmula para a avaliação de uma *European call option* em que o ativo subjacente não paga dividendos. Nesse mesmo ano, Merton (1973) generalizou este modelo para os casos onde há pagamento de dividendos e as taxas de juro são estocásticas.

Em 1974, Merton apresentou formalmente uma análise aos elementos da estrutura de capital de uma empresa tendo por base a sua extensão ao modelo de Black e Scholes (1973), assumindo que as responsabilidades financeiras podem ser analisadas como sendo uma combinação de opções simples.

Os valores dos componentes no balanço de uma empresa são estimados como derivados da variável de estado V – valor dos ativos de uma empresa não alavancada, representado pelas suas atividades económicas – e em que V segue um *geometric Brownian motion* assumindo a medida física \mathbb{P} :

$$\frac{dV_t}{V_t} = (\mu - q)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (2.1)$$

onde μ é a taxa de retorno esperada instantânea do ativo e q a taxa de *payout* recebida pelos detentores dos ativos, incluindo o pagamento de cupões aos obrigacionistas e os dividendos aos acionistas. σ é a volatilidade dos ativos e $\{W_t^{\mathbb{P}} : t \geq 0\}$ é um *standard Brownian motion* assumindo a medida \mathbb{P} .

Assumindo a existência de uma *money-market account* cujo valor dos ativos evolui deterministicamente e que V segue um *geometric Brownian motion* assumindo a medida de risco neutro \mathbb{Q} :

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.2)$$

Sob a medida \mathbb{Q} , assume-se que:

- O valor dos ativos é homogéneo ao longo do tempo, em que o processo de difusão é não negativo;
- $\{W_t^{\mathbb{Q}} : t \geq 0\}$ é um *standard Brownian motion* definido no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$;
- $r \geq 0$ e $q \geq 0$ são constantes e são, respetivamente, a taxa de juro sem risco e a taxa de *payout*;
- A taxa de rentabilidade do valor do ativo $\frac{dV_t}{V_t}$ no mais pequeno intervalo dt segue uma distribuição normal com média $(r - q)dt$ e variância $\sigma^2 dt$.
- Uma vez que a volatilidade é constante, a elasticidade da variância $\left(\frac{d\sigma^2(V,t)}{\sigma^2(V,t)} \times \frac{V_t}{dV_t}\right)$ é nula.

2.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Leland (1994b)

Leland (1994b) torna-se importante no desenvolvimento da análise da estrutura de capital de uma empresa ao derivar uma fórmula de avaliação para uma dada classe de obrigações de cupão com risco de *default* e uma maturidade arbitrária T .

a. Abordagem à política de estacionariedade da dívida

A análise de Leland (1994b) assenta no pressuposto de que o pagamento de *cash flows* da dívida é homogêneo ao longo do tempo, o que se torna questionável quando aplicado ao caso da dívida com maturidade finita. A solução encontrada pelo autor torna-se não só o foco da sua análise como também o ponto chave do estudo da presente dissertação, ao analisar a dívida como um processo estacionário, assumindo que uma fração constante de dívida é amortizada anualmente, mas substituída (a não ser que a empresa entre em *default*) por uma nova dívida com as mesmas características da que se venceu. Assim sendo, a empresa emite uma dívida com um valor nominal total de P , pagando uma taxa cupão total de C e fazendo continuamente *roll over* a uma fração g da dívida inicialmente emitida. A fração a que a dívida é amortizada é designada por taxa de amortização g e apresenta uma relação inversa em relação à sua maturidade média T . A cada instante τ , é amortizado um pedaço de dívida à taxa g e emitida outra no seu lugar com um valor nominal constante p , cupão c e antiguidade iguais, de modo a que o montante P permaneça constante ao longo do tempo. Assim sendo, a fração a que a dívida é amortizada e emitida é refletida pela seguinte igualdade:

$$p = gP \quad (2.3)$$

Sendo $p(\tau, t)$ um pedaço da dívida pendente em t da dívida emitida em $\tau \leq t$ e dado que a cada t , o valor nominal da dívida emitida em $\tau \leq t$ é amortizada à taxa g^7 , não só o valor nominal como o cupão da dívida pendente (emitida em τ) diminui exponencialmente com o tempo:

$$p(\tau, t) = e^{-g(t-\tau)} p \quad (2.4)$$

$$c(\tau, t) = e^{-g(t-\tau)} c \quad (2.5)$$

Uma vez que todos os pedaços de dívida pendente são iguais e amortizados à taxa g , o valor nominal da dívida total P e a taxa cupão total C quando $g > 0$ são dados pela seguinte relação:

$$P = \int_{-\infty}^t p(\tau, t) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-g(t-\tau)} p d\tau = \frac{p}{g} \quad (2.6)$$

$$C = \int_{-\infty}^t c(\tau, t) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-g(t-\tau)} c d\tau = \frac{c}{g} \quad (2.7)$$

⁷ $\frac{dp(\tau, t)}{dt} \times \frac{1}{p(\tau, t)} = \frac{p(-g)e^{-g(t-\tau)}}{pe^{-g(t-\tau)}} = -g$

Como já previamente mencionado, o inverso da taxa de amortização g corresponde a um parâmetro da maturidade média da dívida T . Sendo o tempo no atual instante designado por $\tau = 0$, a fração da dívida pendente que será resgatada num t futuro é de ge^{-gt} . Se o *default* nunca ocorrer, a maturidade média da dívida é:

$$T = \int_0^{\infty} t(ge^{-gt})dt = \frac{1}{g}^8 \quad (2.8)$$

Tendo em conta o mecanismo de funcionamento da dívida, Leland (1994b) conseguiu demonstrar e apresentar as soluções de fórmula fechada para a estrutura de capital de uma empresa, isto é, da dívida total, do capital próprio e do valor total da empresa.

b. Avaliação da Dívida Total assumindo o Modelo GBM

Na presente abordagem, o valor dos ativos de uma empresa não alavancada V segue o processo de difusão definido pela equação (2.2), ou seja, assume-se que V segue um processo de difusão contínuo com uma volatilidade constante que só termina caso $V \leq K$, sendo K designado como o valor que desencadeia a falência.

Leland (1994b) assume a regra da prioridade absoluta, isto é, em caso de *default* os obrigacionistas recebem todo o valor remanescente do ativo e os acionistas não recebem nada. Assim sendo, se este evento ocorrer, os obrigacionistas receberão $(1 - \alpha)K$ – sendo α designado como a fração do valor do ativo perdido em caso de falência – enquanto o valor remanescente do ativo αK é considerado como um custo de falência.

Recorrendo à avaliação de risco neutro e tendo em conta que $f(t, V, K)$ é designado como a função densidade de probabilidade do efeito de primeira passagem em t quando V cai para K e $F(t, V, K)$ como a função de distribuição acumulada do efeito de primeira passagem, a dívida emitida no atual instante $d(0)$ é representada como:

$$d(0) = \int_0^{\infty} e^{-rt} e^{-gt} (c + gp) [1 - F(t, V, K)] dt + \int_0^{\infty} e^{-rt} (e^{-gt} p/P) (1 - \alpha) K f(t, V, K) dt \quad (2.9)$$

onde,

$$f(t, V, K) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2} \quad (2.10)$$

$$k = \ln\left(\frac{V}{K}\right)$$

⁸ Se $g = 0$, nunca ocorrerá amortização e a dívida apresentará uma maturidade infinita. Caso $g \rightarrow \infty$, a maturidade média da dívida aproximar-se-á de zero.

$$\mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}$$

Analisando atentamente a equação (2.9), o primeiro termo visa representar o valor esperado descontado do montante pago aos obrigacionistas em t , incluindo o pagamento de futuros cupões e o pagamento de uma fração do valor nominal da dívida – caso a empresa permaneça solvente – e o segundo termo visa representar o valor presente esperado da fração do valor de falência que será recebido pelos obrigacionistas (cuja obrigação foram emitidas em $\tau = 0$) – no caso da empresa declarar falência.

Após a integração por partes da equação (2.9), a dívida emitida em $\tau = 0$ é dada por:

$$d(0) = \frac{c + gp}{r + g} \left[1 - \int_0^\infty e^{-(r+g)t} f(t, V, K) dt \right] + g(1-\alpha)K \left[\int_0^\infty e^{-(r+g)t} f(t, V, K) dt \right] \quad (2.11)$$

em que,

$$\int_0^\infty e^{-(r+g)t} f(t, V, K) dt = \left(\frac{V}{K} \right)^{-y} \quad (2.12)$$

$$y = \frac{(r - q - 0.5\sigma^2) + [(r - q - 0.5\sigma^2)^2 + 2(g + r)\sigma^2]^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2}, \quad (2.13)$$

onde q é a taxa de *payout* do valor do ativo V .

Sabendo que a maturidade média T é inversamente proporcional à taxa de amortização g e uma vez que a dívida é assumida como sendo estacionária, é necessário garantir não só que a empresa substitui a dívida amortizada por uma nova dívida emitida com o mesmo valor nominal e cupão, como também garantir que o valor nominal da dívida total e o cupão total se mantêm homogêneos ao longo do tempo. Assim sendo:

$$D(g, V, K) = \int_{-\infty}^0 e^{g\tau} d(0) d\tau = \frac{d(0)}{g} \quad (2.14)$$

Sendo $D(g, V, K)$ o valor da dívida total e atendendo às equações (2.6) e (2.7), a expressão da dívida total é dada por:

$$D(g, V, K) = \frac{C + gP}{r + g} \left[1 - \left(\frac{V}{K} \right)^{-y} \right] + (1-\alpha)K \left(\frac{V}{K} \right)^{-y} \quad (2.15)$$

c. Avaliação do Valor Total de uma Empresa assumindo o Modelo GBM

Tendo em consideração a expressão da dívida designada pela equação (2.15), Leland (1994b) assume que o valor total de uma empresa é dado pela seguinte igualdade:

$$v = V + TB - BC, \quad (2.16)$$

onde,

$$TB = \left(\frac{wC}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{K}\right)^{-x}\right] \quad (2.17)$$

$$BC = \alpha K \left(\frac{V}{K}\right)^{-x}, \quad (2.18)$$

em que V é designado como sendo o valor dos ativos de uma empresa, TB como o valor dos benefícios fiscais e BC como os custos de falência.

A solução de fórmula fechada do valor total de uma empresa, depois da equação (2.16) ser substituída pelas equações (2.17) e (2.18), é dada por:

$$v(V, K) = V + \left(\frac{wC}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{K}\right)^{-x}\right] - \alpha K \left(\frac{V}{K}\right)^{-x}, \quad (2.19)$$

onde x é representado pela equação (2.13) quando $g = 0$ e w é designado como a *corporate tax rate*.

d. Avaliação do Capital Próprio assumindo o Modelo GBM

Uma vez que o valor total de uma empresa é representado pela soma de capital próprio e dívida, é encontrada a seguinte relação:

$$E = v - D \quad (2.20)$$

Substituindo o valor da dívida pela equação (2.15) e o valor total de uma empresa pela equação (2.19), a equação (2.20) dá lugar a:

$$E(g, V, K) = V + \left(\frac{wC}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{K}\right)^{-x}\right] - \alpha K \left(\frac{V}{K}\right)^{-x} - \left(\frac{C + gP}{r + g}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{K}\right)^{-y}\right] - (1 - \alpha) K \left(\frac{V}{K}\right)^{-y} \quad (2.21)$$

e. Expressão do valor que desencadeia a falência assumindo o Modelo GBM

No artigo de 1994a, Leland apresenta dois ambientes distintos para o desencadeamento da falência: assentando numa análise endógena – quando a empresa se torna incapaz de aumentar o valor do seu capital próprio o suficiente para igualar o pagamento das suas dívidas obrigacionistas atuais – ou exógena – quando o valor dos ativos de uma empresa é inferior ao valor nominal da dívida quando esta é emitida.

Ao contrário de Leland (1994a) que teve em consideração na sua análise os dois tipos de desencadeamento, Leland (1994b) foca-se apenas no caso em que a falência é determinada endogenamente, passando a designar este valor por K . Assim sendo, o modelo assume que a falência ocorre quando o valor dos ativos V é inferior a um certo nível K , isto é, quando a empresa deixa de conseguir fazer face ao pagamento do cupão e retirar um montante de dívida através da emissão adicional de capital próprio, uma vez que este valor cai para zero $E(V) = 0$. Devido à responsabilidade limitada de capital que proíbe a empresa de poder escolher o menor valor possível, o menor valor de K consistente com um valor de capital próprio positivo para todo o $V > K$ é tal que a *smooth-pasting condition* para quando $V = K$, é:

$$\left. \frac{\partial E(g, V, K)}{\partial V} \right|_{V=K} = 0 \quad (2.22)$$

Resolvendo a equação a ordem a K :

$$K = \frac{\left[\frac{(C + gP)y}{r + g} - \frac{wCx}{r} \right]}{1 + \alpha x + (1 - \alpha)y} \quad (2.23)$$

O valor para qual a falência é desencadeada – dado pela equação (2.23) – é um elemento essencial para que os valores dos componentes da estrutura de capital de uma empresa sejam conhecidos. Sendo assim, substituindo a variável K pela equação (2.23) nas equações (2.15), (2.19) e (2.21) obtêm-se, respetivamente, as soluções de fórmula fechada da dívida total, do valor total de uma empresa e do capital próprio.

2.2. Estrutura da dívida estacionária baseada em Davydov e Linetsky (2001)

Em 2001, Davydov e Linetsky derivaram as soluções analíticas para a avaliação das *lookback options* e das opções barreira assumindo inicialmente que o ativo subjacente seguia o processo GBM e analisando posteriormente o caso para quando o ativo seguia o processo CEV.

Tal como Merton (1974) fez recurso ao modelo de avaliação de opções para avaliar a estrutura de capital de uma empresa em que o capital próprio pode ser analisado como uma *European call option*, o estudo de Davydov e Linetsky (2001) também pode ser aplicado à avaliação da estrutura de capital presente no estudo desta dissertação. O objetivo desta secção é apresentar uma alternativa às soluções de fórmula fechada propostas por Leland (1994b) em que a igualdade definida pela equação (2.12) dá lugar à expressão de ϕ_λ ⁹ apresentada em Davydov e Linetsky (2001) para o caso em que o valor dos ativos de uma empresa segue um GBM. Se a estrutura de capital apresentada por Leland (1994b) fosse comparada a um derivado financeiro analisado em Davydov e Linetsky (2001) a escolha cairia sobre uma opção barreira, uma vez que o capital próprio pode ser analisado como uma *European down-and-out call* com rebate – cujos autores definem como sendo um contrato idêntico a uma *European call option* com a particularidade de que é cancelado caso o valor do ativo subjacente toque numa barreira inferior pré-especificada e com o detalhe adicional de existir a possibilidade dos detentores da opção receberem um rebate caso a barreira *knock-out* seja atingida pela primeira vez.

Como referido no Capítulo 2.1, é fundamental o conhecimento do valor para a qual a falência é desencadeada para que todos os valores dos componentes da estrutura de capital sejam conhecidos. Assim sendo, o foco no artigo de Davydov e Linetsky (2001) irá incidir no efeito de primeira passagem quando V cai para K – onde K é interpretado como a barreira *knock-out*. Caso $V \leq K$, o contrato termina e os obrigacionistas recebem um rebate – que só é considerado na presente análise uma vez que Leland (1994b) assume a regra da prioridade absoluta, isto é, em caso de *default* os obrigacionistas recebem o montante de $(1 - \alpha)K$ e os acionistas não recebem nada.

Tendo em consideração que o primeiro momento em que a barreira inferior (barreira *knock-out*) é tocada pela primeira vez é definida como,

$$\mathcal{T}_K = \inf \{t \geq 0; V_t = K\}, \quad (2.24)$$

onde,

- t é designado como a *running time variable*;
- a *European down-and-out call* é escrita em $t = 0$, expira em $t = T > 0$ e o restante tempo até à maturidade é denotado por $\tau = T - t$;
- V é o valor inicial dos ativos da empresa;
- K o valor da barreira inferior (barreira *knock-out*),

⁹ Uma vez que é apresentada como sendo uma função decrescente em V .

e de modo a que a distribuição de probabilidade do valor atual de um dólar caso ocorra *default* (sob a visão de Davydov e Linetsky) seja conhecida, a presente dissertação recorre às seguintes proposições,

Davydov e Linetsky (2001, proposição 1)¹⁰: *Supondo que o valor dos ativos segue o processo de difusão apresentado em (2.2) e a taxa de juro sem risco é $r > 0$. Então o preço em $t = 0$ de uma perpetual claim é:*

Um dólar pago em T_K :

$$E_V[e^{-r T_K} 1_{\{T_K < \infty\}}] = \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}, V \geq K, \quad (2.25)$$

onde E_V é calculado assumindo a medida de risco neutro \mathcal{Q} e V indica que o processo seguido em (2.2) começa em $V_0 = V$.

As funções $\psi_r(V)$ e $\phi_r(V)$ são caracterizadas como sendo as únicas soluções da equação diferencial ordinária do processo GBM,

$$\frac{1}{2}\sigma^2(V)V^2 \frac{d^2u}{dV^2} + (r - q)V \frac{du}{dV} - ru = 0, \quad V \in (0, \infty), \quad (2.26)$$

é imposto que $\psi_r(V)$ esteja a crescer em V e $\phi_r(V)$ esteja a decrescer em V . Recordando que V segue um *geometric Brownian motion* $V_t = V e^{(r-q-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}$ (em que a volatilidade dos ativos é constante), a forma funcional da solução ϕ_λ ¹¹ é apresentada como sendo:

$$\phi_\lambda(V) = V^{\gamma_-} \quad (2.27)$$

onde

$$\gamma_-(\lambda) = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 + \frac{2\lambda}{\sigma^2}} \quad (2.28)$$

com

$$\gamma = \frac{(r - q)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad (2.29)$$

¹⁰ Apesar de na Proposição 1 de Davydov e Linetsky (2001) serem apresentadas as fórmulas de avaliação de cinco *claims*, a presente dissertação focou-se apenas na *claim* essencial para a análise em questão.

¹¹ Em que $\lambda = (r + g)$ ou $\lambda = r$ quando $g = 0$.

Davydov e Linetsky (2001, proposição 2): Para qualquer $\lambda > 0$, a transformada de Laplace do preço do rebate até à maturidade é igual a $\frac{1}{\lambda}$ vezes o preço da correspondente perpetual claim com a taxa de desconto ajustada a $r + \lambda$, isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda T} E_V[\mathbf{1}_{\{T_K \leq T\}} e^{-rT_K}] dT = \frac{1}{\lambda} E_V[e^{-(r+\lambda)T_K}] \quad (2.30)$$

Davydov e Linetsky (2001, lema 1): Seja m_t o valor mínimo registado até à data t , $m_t = \min_{0 \leq u \leq t} V_u$. Definindo a função $F(t, V, K) = Q_V(m_t \leq K)$ (a probabilidade é calculada assumindo a medida de risco neutro Q e V indica que o processo começa em $V_0 = V$). Assim sendo, para qualquer $\lambda > 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F(t, V, K) dt = \frac{1}{\lambda} \frac{\phi_{\lambda}(V)}{\phi_{\lambda}(K)}, 0 < K \leq V, \quad (2.31)$$

cuja transformada de Laplace reflete a distribuição de probabilidade do valor mínimo, isto é,

$$F(t, V, K) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\phi_{\lambda}(V)}{\phi_{\lambda}(K)} \right] \quad (2.32)$$

Definindo a função de densidade de probabilidade do efeito de primeira passagem como $f(t, V, K | g)$ e o valor de uma *digital option*¹², o valor atual de um dólar caso ocorra *default* é dado por $Y(g, V, K)$. Isto é,

$$Y(g, V, K) = \int_0^{\infty} e^{-rt} f(t, V, K) dt \quad (2.33)$$

Demonstração:

Recorrendo à equação (0) apresentada em Borodin e Salminen (2002, página 649) para estabelecer a relação entre $Y(g, V, K)$ e $f(t, V, K)$, assim como às proposições 1, 2 e ao lema 1 acima mencionados, é possível concluir que $Y(g, V, K)$ é dado pela seguinte relação:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda T} Y(g, V, K) dT = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-(r+\lambda)t} f(t, V, K) dt = \frac{1}{\lambda} \frac{\phi_{r+\lambda}(V)}{\phi_{r+\lambda}(K)}, \quad (2.34)$$

¹² Contrato que paga um valor fixo se o ativo subjacente ultrapassar um valor pré-determinado.

sendo que a distribuição de probabilidade do valor atual de um dólar caso ocorra *default* é calculada através da transformada de Laplace, temos que,

$$Y(g, V, K) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\phi_{\lambda+r}(V)}{\phi_{\lambda+r}(K)} \right] \quad (2.35)$$

□

Considerando as expressões dos componentes da estrutura de capital de uma empresa definidas em (2.15), (2.19), (2.21) e (2.23) e substituindo a igualdade definida em (2.12) pela expressão (2.35), as soluções de fórmula fechada da dívida total, do valor total de uma empresa, do capital próprio e da barreira determinada endogenamente são representadas, respetivamente, como:

$$D(g, V, K) = \frac{C + gP}{r + g} \left(1 - \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) + (1-\alpha)K \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \quad (2.36)$$

$$v(V, K) = V + \left(\frac{wC}{r} \right) \left(1 - \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) - \alpha K \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} E(g, V, K) = V + \left(\frac{wC}{r} \right) \left(1 - \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) - \alpha K \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \\ - \left(\frac{C + gP}{r + g} \right) \left(1 - \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) - (1-\alpha)K \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$K = \frac{\left[\left(\frac{C + gP}{r + g} \times \gamma_-(r + g) \right) - \left(\frac{wC}{r} \times \gamma_-(r) \right) \right]}{-1 + (\alpha \times \gamma_-(r)) + (1 - \alpha) \times \gamma_-(r + g)} \quad (2.39)$$

Demonstração da equação (2.39): Ver anexo A.

□

3. Modelo *Constant Elasticity of Variance* (CEV)

Tal como abordado no início do Capítulo 2, o modelo de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) assume que o valor do ativo subjacente segue uma distribuição *lognormal*, o que implica que a sua volatilidade permanecerá constante ao longo do tempo. Embora este modelo tenha sido um grande progresso no âmbito da avaliação de opções, esta hipótese tem vindo a ser contestada em vários estudos e sustentada pela análise a vários mercados de que existe de facto uma volatilidade implícita e que esta é influenciada pelo preço de exercício praticado. Prova disso é o mercado de opções sobre o capital próprio (por exemplo, sobre ações individuais ou índice de ações), que reflete a existência de uma *implied volatility smile*, isto é, a volatilidade como uma função decrescente do preço de exercício. Hull (2015, página 436, figura 20.3) apresenta o gráfico que espelha a relação entre estas duas variáveis e de onde é possível constatar-se que para um preço de exercício mais alto (baixo), a volatilidade é mais baixa (alta). A existência de uma *implied volatility smile* pode ser explicada a partir do efeito alavanca, uma vez que quando o valor do capital próprio de uma empresa diminui, a alavancagem dessa empresa aumenta, o capital próprio torna-se mais arriscado e, portanto, a volatilidade aumenta¹³. Uma outra explicação para a existência de uma volatilidade implícita apontada também em Hull (2015) assenta no efeito de *crashophobia*, – o receio de que volte a acontecer um *crash* como o que aconteceu no mercado acionista americano em Outubro de 1987 – assim sendo, o mercado reage ao decréscimo no valor do índice de ações com um aumento de volatilidade e com uma diminuição perante um aumento no valor do índice.

Em 1975, surge o modelo *Constant Elasticity of Variance* (CEV) proposto por Cox que passa a refletir a *implied volatility smile* ou *skew*, uma vez que assume que a variação instantânea do retorno dos ativos depende do valor do ativo subjacente. Este modelo assume que o valor do ativo subjacente¹⁴ segue o processo de difusão assumindo a medida de risco neutro Q :

$$dV_t = (r - q)V_t dt + \theta V_t^{\frac{\delta}{2}} dW_t^Q \quad (3.1)$$

Apesar de Cox e Ross (1976) definirem o fator de elasticidade como δ , ao longo da dissertação, este termo será substituído por $\frac{\delta}{2} = \beta + 1$. Assim sendo,

$$dV_t = (r - q)V_t dt + \theta V_t^{\beta+1} dW_t^Q, \quad (3.2)$$

onde:

- dV_t é a mudança do valor dos ativos ao longo do incremento de tempo dt ;
- r e q são, respetivamente, a taxa de juro sem risco e a taxa de *payout*¹⁵, onde $r \geq 0$ e $q \geq 0$;
- θ é definido como o parâmetro de escala que fixa a volatilidade instantânea inicial em $t = t_0$;
- β é o fator de elasticidade constante;
- $\{W_t^Q : t \geq 0\}$ é um *standard Brownian motion* definido no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, Q)$;

¹³ O mesmo acontece no caso inverso, isto é, se o valor do capital próprio aumentar, a alavancagem diminui, o capital próprio dessa empresa torna-se menos arriscado, diminuindo assim a volatilidade.

¹⁴ Nesta dissertação é assumido como sendo o valor dos ativos de uma empresa não alavancada V .

¹⁵ Taxa paga aos detentores de ativos, incluindo o pagamento de cupões aos obrigacionistas e dividendos aos acionistas.

- $\frac{dV_t}{V_t}$ designa a taxa de rentabilidade do valor do ativo no mais pequeno intervalo dt com média $(r - q)dt$ e $Var\left(\frac{dV_t}{V_t}\right) = \theta^2 V_t^{2\beta} dt$;
- dW_t^Q é o incremento do processo *Wiener*.

A grande diferença entre o processo de difusão refletido pela equação (2.2) e pela equação (3.2) assenta no termo de difusão. Neste processo, a volatilidade instantânea inicial é apresentada como:

$$\sigma_0 = \sigma(t_0; V_{t_0}) = \theta V_{t_0}^\beta \quad (3.3)$$

Ficando assim provado que a elasticidade da variância é constante:

$$\left(\frac{d\sigma^2(V, t)}{\sigma^2(V, t)} \times \frac{V_t}{dV_t}\right) = 2\beta \theta^2 V_t^{2\beta-1} \frac{V_t}{\theta^2 V_t^{2\beta}} = 2\beta \quad (3.4)$$

A chave deste modelo reside em β que, quando substituído na equação (3.2) por:

- $\beta = 0$, se torna o *geometric Brownian motion* com volatilidade constante (equação 2.2);
- $\beta = -\frac{1}{2}$ corresponde ao modelo de *square-root* de Cox e Ross (1976);
- $\beta = -1$ corresponde ao modelo absoluto de Cox e Ross (1976);

O facto de $\beta > 0$ ($\beta < 0$) indica que a volatilidade do ativo está positivamente (negativamente) correlacionada com o preço do ativo.

3.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Perrakis e Zhong (2015)

No Capítulo 2.1, foram analisadas as soluções de fórmula fechada apresentadas em Leland (1994b) para os componentes da estrutura de capital de uma empresa não alavancada cujo valor dos seus ativos seguia o processo de difusão com volatilidade constante. O presente capítulo irá também apresentar estas soluções, mas ao invés do capítulo anterior, o valor dos seus ativos irá reger-se pelo processo de difusão descrito na equação (3.2). Este processo é definido como sendo um processo infinito que só termina caso o valor dos ativos de uma empresa V atinja pela primeira vez ou se torne inferior a um valor pré-definido K , valor este designado em Perrakis e Zhong (2015) como sendo a barreira de *default*. Caso isto aconteça, a empresa declara falência e a liquidação acontece imediatamente.

Designando a maturidade arbitrária de uma obrigação por T – que nesta dissertação é determinada pelo valor inverso da taxa de amortização (equação 2.8) – e o efeito de primeira passagem quando o valor dos ativos toca na barreira de *default* por τ , a dinâmica do valor dos ativos torna-se:

$$\begin{cases} dV_t = (r - q)V_t dt + \theta V_t^{\beta+1} dW_t^Q, se\ 0 < t < \tau < T \\ V_t = \min\{V_t, K\}, se\ 0 < \tau \leq t < T \end{cases} \quad (3.5)$$

Tal como abordado anteriormente, o estudo de Leland (1994b) tem como ponto de partida a hipótese dos *cash flows* se manterem homogêneos ao longo do tempo. Ainda que o modelo incida na análise de uma dívida com maturidade infinita, esta hipótese levanta questões quando aplicada a uma dívida com maturidade finita. Leland (1994b) contorna esta questão, assumindo que a dívida segue um processo *roll over*, onde um pedaço da dívida total é anualmente amortizado, mas é emitido imediatamente outro com as mesmas características de modo a substituir o pedaço que se venceu. O processo só termina caso a empresa declare falência, isto é, quando $V_t \leq K$.

Perrakis e Zhong (2015) vai de encontro a esta ideologia, assumindo também que a estrutura de dívida de uma empresa se rege pela sua estacionariedade. O processo tal como abordado em Leland (1994b), consiste no vencimento e emissão à taxa de amortização g de um pedaço de dívida com as mesmas características da que se vence, ou seja, será emitida com o mesmo valor de cupão c e o mesmo valor nominal p , de modo a que o valor nominal total da dívida P e o pagamento total de cupões C permaneçam constantes e inalterados ao longo do tempo. Assim sendo e uma vez que todos os pedaços de dívida são idênticos e amortizados à taxa g , o valor de P e de C são dados pelas equações (2.6) e (2.7), respetivamente.

A grande diferença entre o artigo de Leland (1994b) e o de Perrakis e Zhong (2015) assenta no processo de difusão seguido pelo valor dos ativos de uma empresa. Se por um lado Leland (1994b) assume que os ativos seguem uma volatilidade constante, Perrakis e Zhong (2015) assumem que os ativos seguem uma volatilidade não constante. O processo de difusão pelo qual se regem irá influenciar o modo como a dívida total de uma empresa é calculada, uma vez que a função densidade de probabilidade é diferente nos dois casos, como será analisado na próxima secção.

a. Avaliação da Dívida Total assumindo o Modelo CEV

Tendo em conta a característica de estacionariedade, um pedaço da dívida total $d(g, V, K)$ é emitido¹⁶ à taxa de amortização g quando um outro se vence, de modo a que o montante de dívida total P permaneça constante ao longo do tempo. Assim como em Leland (1994b), em Perrakis e Zhong (2015) também é assumida a regra da prioridade absoluta, ou seja, no caso da empresa declarar *default* antes da maturidade, isto é, quando $V_{t=\tau} = K$ os obrigacionistas recebem $g(1 - \alpha)K$ e os acionistas não recebem nada.

A expressão que define um pedaço de dívida em circulação é seguidamente apresentada e assume tal como Leland assumiu – e se refletiu na equação (2.9) – uma medida de risco neutro dado uma taxa de juro sem risco r ,

$$d(g, V, K) = E \left[\int_0^\tau e^{-rs} (e^{-gs} c + g e^{-gs} p) ds + e^{-(r+g)\tau} g(1 - \alpha)K \right] \quad (3.6)$$

Atendendo à equação (3.6), constata-se que, caso a empresa permaneça solvente até à maturidade ($0 < t < \tau$), verifica-se em t não só o pagamento do valor esperado descontado de um cupão não-negativo $e^{-gt} c$, como também a amortização do montante $g e^{-gt} p$. Caso a empresa entre em *default*, os obrigacionistas recebem o valor presente esperado $g(1 - \alpha)K$.

Recordando a equação (2.33), o valor atual de um dólar caso ocorra *default* é dado por $Y(g, V, K)$,

$$Y(g, V, K) = \int_0^\infty e^{-r\tau} f(\tau, V, K) d\tau, \quad (3.7)$$

cuja função densidade de probabilidade do efeito de primeira passagem é definido como $f(\tau, V, K | g)$.

Perrakis e Zhong (2015, lema 1): Quando a volatilidade não constante é dada pelo processo CEV, $\sigma(V) = \theta V^\beta$, o valor atual de um dólar caso ocorra *default* é dado por,

$$Y(g, V, K) = \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \equiv Y_{r+g} \quad (3.8)$$

onde,

$$\phi_r(V) = \begin{cases} V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} W_{k.m}(\chi(V)), & \beta < 0, (r - q) \neq 0 \\ V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} M_{k.m}(\chi(V)), & \beta > 0, (r - q) \neq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

¹⁶ Com as mesmas características do que vai substituir.

$$\chi(V) = \frac{|r - q|}{\theta^2 |\beta|} V^{-2\beta} \quad (3.10)$$

$$\epsilon = \text{sign}((r - q)\beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta(r - q) > 0 \\ -1 & \text{se } \beta(r - q) < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$m = \frac{1}{4|\beta|} \quad (3.12)$$

e

$$k = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{r}{2|(r - q)\beta|} \quad (3.13)$$

onde $W_{k,m}(\chi(V))$ e $M_{k,m}(\chi(V))$ são as funções de Whittaker definidas, respetivamente, pelas equações (13.1.33) e (13.1.32) em Abramowitz e Stegun (1972, página 505).

Demonstração:

Esta demonstração tem como objetivo provar que a igualdade apresentada pela equação (3.8) assumindo o processo CEV é dada pelas equações (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13).

Recordando a equação (2.24) em que $\mathcal{T}_K = \inf \{t \geq 0; V_t = K\}$ designa a primeira vez que V é igual a K (o valor que desencadeia a falência de uma empresa) e recorrendo às equações (2.25), (2.30), (2.31), (2.32) e (2.34) prova-se a igualdade presente na equação (2.35) e (3.8).

Assumindo o processo de difusão refletido na equação (3.2), em que $\beta \neq 0$ e $\lambda > 0$ e acordo com a **proposição 5 de Davydov e Linetsky (2001)**, a solução fundamental decrescente¹⁷ ϕ_λ da equação ordinária do processo CEV,

$$\frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} \frac{d^2 u}{dV^2} + (r - q)V \frac{du}{dV} - \lambda u = 0, \quad V \in (0, \infty) \quad (3.14)$$

é

¹⁷ A equação ordinária também apresenta uma solução crescente ψ_λ , porém para o estudo em questão não é relevante ser mencionada.

$$\phi_\lambda(V) = \begin{cases} V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} W_{k.m}(\chi(V)), & \beta < 0, (r-q) \neq 0 \\ V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} M_{k.m}(\chi(V)), & \beta > 0, (r-q) \neq 0 \\ V^{\frac{1}{2}} K_\nu(\sqrt{2\lambda z}), & \beta < 0, (r-q) = 0 \\ V^{\frac{1}{2}} I_\nu(\sqrt{2\lambda z}), & \beta > 0, (r-q) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $W_{k.m}(\chi(V))$ e $M_{k.m}(\chi(V))$ são as funções de *Whittaker* e K_ν e I_ν são as funções modificadas de *Bessel*.

Uma vez que para a demonstração em questão só é contemplado o caso para quando $(r-q) \neq 0$, só se terá em consideração as primeiras duas equações da solução decrescente $\phi_\lambda(V)$, assim como apresentado na equação (3.9), onde $\lambda = (r+g)$ ou $\lambda = r$ quando $g = 0$.

□

A grande diferença entre o estudo abordado no Capítulo 2.1 e o presente capítulo assenta nas diferentes funções de densidade de probabilidade do efeito de primeira passagem que os autores se baseiam. Se por um lado, Leland (1994b) se rege pela igualdade apresentada pela equação (2.12), Perrakis e Zhong (2015) segue a relação anteriormente apresentada e demonstrada pela equação (3.7). Esta diferença irá refletir-se não só na expressão da dívida – como abordado seguidamente – como em todas as expressões dos restantes componentes de uma empresa.

Perrakis e Zhong (2015, lema 2): *O valor da dívida de uma empresa com uma taxa de amortização g é igual a,*

$$d(g, V, K) = \frac{c + gp}{r + g} [1 - Y_{r+g}] + g(1 - \alpha)KY_{r+g}, \quad (3.16)$$

onde Y_{r+g} é dado pela equação (3.8).

A expressão do valor de um pedaço de dívida em circulação definido pela equação (3.16) é equivalente à equação (2.11), mas tal como mencionado anteriormente, a diferença entre ambas assenta nas funções de densidade de probabilidade que foram tidas em consideração.

Demonstração:

Atendendo à equação (3.6),

$$\begin{aligned}
d(g, V, K) &= E \left(\int_0^\tau e^{-rs} (e^{-gs} c + g e^{-gs} p) ds + e^{-r\tau} g e^{-g\tau} (1 - \alpha) K \right) \\
d(g, V, K) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\tau e^{-rs} (e^{-gs} c + g e^{-gs} p) ds + e^{-r\tau} g e^{-g\tau} (1 - \alpha) K \right) \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\tau e^{-rs} (e^{-gs} c + g e^{-gs} p) ds \right) \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-(r+g)\tau} g (1 - \alpha) K \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left[\left(\int_0^\tau e^{-rs} e^{-gs} c ds \right) + \left(\int_0^\tau e^{-rs} g e^{-gs} p ds \right) \right] \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&\quad + g(1 - \alpha) K \int_0^\infty e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left[c \left(\int_0^\tau e^{-(r+g)s} ds \right) + gp \left(\int_0^\tau e^{-(g+r)s} ds \right) \right] \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&\quad + g(1 - \alpha) K \int_0^\infty e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left\{ c \left[\frac{e^{-(r+g)s}}{-(r+g)} \right]_0^\tau + gp \left[\frac{e^{-(r+g)s}}{-(r+g)} \right]_0^\tau \right\} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&\quad + g(1 - \alpha) K \int_0^\infty e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left[c \times \frac{e^{-(r+g)\tau}}{-(r+g)} + \frac{c}{(r+g)} + gp \times \frac{e^{-(r+g)\tau}}{-(r+g)} + \frac{gp}{r+g} \right] \times f(\tau, V, K) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g(1 - \alpha)K \int_0^{\infty} e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
& = \frac{c + gp}{r + g} \left(1 + \int_0^{\infty} -e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \right) + g(1 - \alpha)K \int_0^{\infty} e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \\
& = \frac{c + gp}{r + g} \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau \right) + g(1 - \alpha)K \int_0^{\infty} e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau
\end{aligned}$$

Tendo em consideração as equações (3.7) e (3.8),

$$Y(g, V, K) = \int_0^{\infty} e^{-(r+g)\tau} \times f(\tau, V, K) d\tau = \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \equiv Y_{r+g},$$

o valor da dívida é então dado por,

$$d(g, V, K) = \frac{c + gp}{r + g} [1 - Y_{r+g}] + g(1 - \alpha)KY_{r+g}$$

□

Para que o montante de dívida total permaneça constante ao longo do tempo, o valor dos pedaços de dívida em circulação $d(g, V, K)$ têm de ser idênticos e, de facto, isto verifica-se, uma vez que, assim que um pedaço de dívida se vence, é emitido outro no seu lugar com o mesmo principal p e o mesmo cupão c , de modo a substituir o pedaço de dívida que se venceu. Assim sendo e uma vez que a dívida se vence e se emite a uma taxa de amortização g , verifica-se a seguinte relação entre um pedaço de dívida em circulação e a dívida total:

$$D(g, V, K) = \int_0^{\infty} d(g, V, K) dt = \frac{d(g, V, K)}{g}, \quad (3.17)$$

sendo $D(g, V, K)$ dado pela seguinte igualdade,

$$D(g, V, K) = \frac{C + gP}{r + g} [1 - Y_{r+g}] + (1 - \alpha)KY_{r+g} \quad (3.18)$$

b. Avaliação do Capital Próprio assumindo o Modelo CEV

Assim que se verifica o pagamento de cupões e os custos de dívida continuem a ser amortizados, os acionistas têm o direito de reclamar os *cash flows* residuais na forma de dividendos. Sendo o valor de capital próprio designado por $E(g, V, K)$ e a *corporate tax rate* por w , o valor de capital próprio assumindo que a volatilidade não constante $\sigma(V)$, satisfaz a seguinte equação:

$$rE(g, V, K) = (r - q)VE_V + \frac{1}{2}(\sigma(V))^2 V^2 E_{VV} + qV - (1 - w)C + gD(g, V, K) - gP \quad (3.19)$$

Os dois primeiros termos da equação (3.19) refletem a alteração no valor de capital próprio devido à mudança na dinâmica dos ativos de uma empresa não alavancada, o terceiro e quarto termo são, respetivamente, os *cash inflows* dos dividendos e o custo do imposto do cupão da dívida. Os dois últimos termos representam a alteração no valor de capital próprio pela absorção do custo da emissão de dívida, com a dívida a ser amortizada ao valor nominal, mas refinanciada ao valor de mercado. Na presente dissertação, apenas se terá em conta – como será verificado no próximo capítulo – o caso para quando a dívida é emitida ao par, isto é, quando a diferença entre os dois últimos termos é zero; mas caso a nova dívida fosse emitida a desconto, ou seja, se a diferença entre os dois últimos termos fosse negativa, verificar-se-ia dois efeitos: por um lado que os custos seriam impostos aos acionistas através do processo *roll over* da dívida, por outro que o pagamento de cupões seria relativamente baixo uma vez que a nova dívida seria emitida abaixo do par. Caso esta nova dívida apresentasse um preço justo, estes dois efeitos iriam cancelar-se.

Para a obtenção da expressão de capital próprio, é necessária resolução da equação (3.19) tendo em conta as seguintes condições de fronteira:

$$E(K) = 0 \text{ quando } V = K \quad (3.20)$$

$$E(V) \sim V \text{ quando } V \rightarrow \infty, \quad (3.21)$$

em que a primeira condição assume que o valor do capital próprio se iguala a zero quando o valor dos seus ativos de uma empresa não alavancada atinge a barreira de *default*, isto é, para quando $V = K$; a segunda condição assume que o valor de capital próprio deve aumentar linearmente em relação ao valor dos ativos, quando o valor destes tende para infinito.

Perrakis e Zhong (2015, lema 3): A solução analítica da equação (3.19), dadas as condições de fronteira definidas pelas equações (3.20) e (3.21) é

$$E(g, V, K) = V + \frac{wC}{r} [1 - Y_r] - \alpha KY_r - \left[\frac{C + gP}{r + g} + \left((1 - \alpha)K - \frac{C + gP}{r + g} \right) Y_{r+g} \right] \quad (3.22)$$

Demonstração: Ver anexo B.

□

c. Avaliação do Valor Total de uma Empresa assumindo o Modelo CEV

Pela equação (2.20) é possível deduzir-se que o valor total de uma empresa é a soma do valor da dívida total com o valor de capital próprio. Sendo a expressão do valor da dívida total definida pela equação (3.18) e a expressão de capital próprio pela equação (3.22), temos que:

$$v(V, K) = V + \frac{wC}{r} [1 - Y_r] - \alpha KY_r, \quad (3.23)$$

em que o primeiro termo da equação representa o valor dos ativos de uma empresa, o segundo termo reflete os benefícios fiscais recebidos caso a empresa permaneça solvente e o terceiro termo designa os custos de falência caso ocorra *default*. Uma vez que o valor do pagamento total de cupões C e o valor nominal da dívida total P permanecem constantes durante todo o processo, tanto os custos de falência como os benefícios fiscais permanecerão também constantes ao longo do tempo, assumindo-se assim que o valor dos benefícios fiscais depende apenas do valor de C .

d. Expressão do valor que desencadeia a falência assumindo o Modelo CEV

Tal como abordado ao longo de toda esta dissertação, o *default* ocorre quando $V \leq K$. A determinação de K – designado por Perrakis e Zhong (2015) como sendo o valor da barreira de *default* – pode ser obtido tendo em conta dois ambientes distintos: quer por determinação exógena, quer por endógena. A barreira de *default* é determinada exogenamente quando a empresa não consegue escolher o valor que desencadeia o *default*. Assumindo esta hipótese apresenta-se o estudo de Longstaff e Schwartz (1995) ao considerar que a empresa entra em *default* quando o valor da barreira é igual ao valor nominal da dívida total $K = P$, sendo este momento definido como a primeira vez que a empresa apresenta um “património líquido negativo”. Contudo, muitos estudos comprovam que as empresas continuam no ativo apesar deste valor ser negativo e de modo a melhorar este processo, Huang e Huang (2002) introduz na análise uma nova variável β (valor inferior ou igual a um) de modo a que $K = \beta P$. O modelo Moody’s KMV apresentou uma alternativa como uma melhoria ao processo apresentado por Longstaff e Schwartz (1995) ao definir o valor da barreira como a soma do valor nominal da dívida a curto prazo com metade do valor nominal da dívida a longo prazo. Leland (2004) apresenta de entre muitas hipóteses, a que será usada na presente análise, isto é, o valor da barreira de *default* determinado exogenamente será o mesmo que o valor da barreira determinada endogenamente, o que adaptado a este estudo será o uso da barreira de *default* determinada endogenamente para quando $\beta = 0$ (em cada caso) que designará o valor da barreira de *default* exógena. No caso da barreira ser determinada endogenamente, a empresa escolhe o valor que maximiza o valor de capital próprio, de modo a respeitar a responsabilidade limitada de capital e tendo em conta a condição definida pela equação (2.22).

Perrakis e Zhong (2015, proposição 1): De acordo com a *smooth pasting condition* definida pela equação (2.22), o valor da barreira endógena assumindo o processo de difusão CEV e designado por K , pode ser obtido através da resolução da seguinte equação para os valores dos parâmetros dados por,

$$1 - \left[\frac{wC}{r} + \alpha K \right] \left[\frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} \right] + \left[\frac{C + gP}{r + g} - (1 - \alpha)K \right] \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \frac{\partial \phi_{r+g}(K)}{\partial K} = 0 \quad (3.24)$$

onde,

$$\frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} = \begin{cases} \frac{\beta + 0.5}{K} + \left[0.5\epsilon + 0.5 - \frac{k}{\chi(K)} - \frac{W_{k+1,m}(\chi(K))}{W_{k,m}(\chi(K))\chi(K)} \right] \chi'(K) & \text{se } \beta < 0 \\ \frac{\beta + 0.5}{K} + \left[0.5\epsilon + 0.5 - \frac{k}{\chi(K)} + \frac{M_{k+1,m}(\chi(K))(k + m + 0.5)}{M_{k,m}(\chi(K))\chi(K)} \right] \chi'(K) & \text{se } \beta > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Demonstração:

O valor do capital próprio é dado pela equação (3.22) com a volatilidade variável no tempo. A primeira derivada parcial do capital próprio em ordem ao valor dos ativos de uma empresa é dada por,

$$\frac{\partial E(g, V, K)}{\partial V} = 1 - \left[\frac{wC}{r} + \alpha K \right] \left[\frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(V)}{\partial V} \right] + \left[\frac{C + gP}{r + g} - (1 - \alpha)K \right] \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \frac{\partial \phi_{r+g}(V)}{\partial V} \quad (3.26)$$

Aplicando a *smooth pasting condition* definida pela equação (2.22) à equação anterior, a expressão do lado direito da equação vai igualar-se a 0 para quando o valor dos ativos V é igual a K , da qual resulta a equação (3.24).

Para a demonstração do sistema de equações refletido pela equação (3.25), irá começar-se por particularizar o caso para $\beta < 0$ e posteriormente para $\beta > 0$.

- Quando $\beta < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \frac{\partial \left(K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K)) \right)}{\partial K} \\ &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \times \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K)) \right] \end{aligned}$$

$$+ K^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K)) + K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} \frac{\partial W_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \Big]$$

Dado que $\chi'(K) = \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} = (-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K)) \right. \\ &\quad + K^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{\epsilon}{2} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K)) \\ &\quad \left. + K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \frac{\partial W_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right\} \\ &= \left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{-1} + \frac{\epsilon}{2} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \\ &\quad + \frac{1}{W_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \frac{\partial W_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right\} \\ &= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \frac{\epsilon}{2} \chi'(K) + \frac{1}{W_{k.m}(\chi(K))} \left[\chi'(K) \frac{\partial W_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right] \end{aligned}$$

De acordo com a equação (13.4.33) de Abramowitz e Stegun (1972, página 507), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \frac{\epsilon}{2} \chi'(K) \\ &\quad + \frac{1}{W_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \chi'(K) \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} \right) W_{k.m}(\chi(K)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(K))}{\chi(K)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \frac{\epsilon}{2} \chi'(K) + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} \right) \chi'(K) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(K))}{W_{k.m}(\chi(K))\chi(K)} \chi'(K) \right]$$

$$= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \left[0.5\epsilon + \frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} - \frac{W_{k+1.m}(\chi(K))}{W_{k.m}(\chi(K))\chi(K)} \right] \chi'(K)$$

- Quando $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K))} \frac{\partial \left(K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K)) \right)}{\partial K} \\ &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K))} \times \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K)) \right. \\ &\quad \left. + K^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K)) + K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} \frac{\partial M_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right] \end{aligned}$$

Dado que $\chi'(K) = \frac{\partial \chi(K)}{\partial K} = (-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K)) \right. \\ &\quad \left. + K^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{\epsilon}{2} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} M_{k.m}(\chi(K)) \right. \\ &\quad \left. + K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \frac{\partial M_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right\} \\ &= \left(\beta + \frac{1}{2} \right) K^{-1} + \frac{\epsilon}{2} \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \\ &\quad + \frac{1}{M_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \left[(-2\beta)K^{-2\beta-1} \frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right] \frac{\partial M_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \frac{\epsilon}{2} \chi'(K) + \frac{1}{M_{k.m}(\chi(K))} \left[\chi'(K) \frac{\partial M_{k.m}(\chi(K))}{\partial \chi(K)} \right]$$

De acordo com a equação (13.4.32) de Abramowitz e Stegun (1972, página 507), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_r(K)} \frac{\partial \phi_r(K)}{\partial K} &= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \frac{\epsilon}{2} \chi'(K) + \frac{1}{M_{k.m}(\chi(K))} \left\{ \chi'(K) \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} \right) M_{k.m}(\chi(K)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2m + 2k + 1}{2\chi(K)} \right) M_{k+1.m}(\chi(K)) \right] \right\} \\ &= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \left[\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} + 0.5\epsilon + \frac{(2m + 2k + 1)M_{k+1.m}(\chi(K))}{2\chi(K)M_{k.m}(\chi(K))} \right] \chi'(K) \\ &= \left(\frac{\beta + 0.5}{K} \right) + \left[0.5\epsilon + \frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(K)} + \frac{M_{k+1.m}(\chi(K))(k + m + 0.5)}{M_{k.m}(\chi(K))\chi(K)} \right] \chi'(K) \end{aligned}$$

□

4. Análise Numérica

No presente capítulo serão analisados vários cenários de modo a que seja possível analisar o comportamento e estabelecer uma comparação entre os diversos componentes de uma empresa tendo em conta os dois processos de difusão apresentados ao longo desta dissertação (Modelo GBM e Modelo CEV). Para o caso do valor dos ativos de uma empresa seguir o processo GBM, ter-se-á em conta não só as equações (2.15), (2.19), (2.21) e (2.23) – baseadas em Leland (1994b) – como as equações (2.36), (2.37), (2.38) e (2.39) – baseadas em Davydov e Linetsky (2001). Caso o valor dos ativos de uma empresa siga o processo CEV, o processo basear-se-á nas equações (3.18), (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25) – propostas por Perrakis e Zhong (2015). Todas as equações anteriormente mencionadas foram implementadas numericamente em *Python 3.6 (Spyder)* e ajustadas de acordo com o estudo de cada tópico (ver Anexo C).

A escolha de parâmetros adotada nesta análise assume a mesma escolha adotada por Perrakis e Zhong (2015): o valor atual dos ativos da empresa $V_0 = V = 100$; a taxa de juro sem risco $r = 8\%$; a taxa de *payout* paga pela empresa $q = 6\%$; a taxa de benefícios fiscais $w = 35\%$; os custos de falência $\alpha = 50\%$ e a volatilidade inicial instantânea do ativo $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. No caso de V seguir o processo CEV, o valor β poderá assumir qualquer um destes valores $\beta \in \{-1; -0,5; 0,5; 1\}$. Uma vez que todos os cenários irão incluir diferentes β e para que todos estes possam ser comparados, tem que existir a garantia de que a volatilidade inicial instantânea do ativo é igual em todos os casos, o que se torna possível quando reajustado o parâmetro de escala $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. A escolha de β , tal como muitas outras variáveis, dependerá do cenário em questão.

Todos os tópicos seguidamente apresentados irão assumir que o valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par, ou seja, que o valor de mercado da dívida será igual ao seu valor nominal. Assim sendo, para $\beta = 0$, as equações (2.15) e (2.36) irão igualar-se a P e a mesma igualdade será aplicada à equação (3.18) no caso de $\beta \neq 0$.

a. Barreira de *default* determinada endogenamente

O foco da análise desta secção centra-se na demonstração da influência de certos parâmetros na determinação do valor para a qual a falência é determinada endogenamente – como já anteriormente designado de barreira de *default* endógena K . Para o caso de $\beta = 0$, ter-se-á em consideração as equações (2.23) e (2.39) apresentadas respetivamente no Capítulo 2.1 e 2.2. Caso $\beta \neq 0$, o caso remete para o uso do Modelo CEV abordado no Capítulo 3 e, portanto, as equações a serem consideradas serão a (3.24) e a (3.25).

- Influência da Maturidade Média da dívida T

A Figura 4.1 reflete a influência da maturidade média da dívida T na determinação de K para os casos de $\beta = \{-1; -0,5; 0; 0,5; 1\}$. Para todos os casos verifica-se que a variável T tem um efeito inversamente proporcional sobre a variável K , podendo então assumir-se que quanto maior é a maturidade média da dívida total, menor é o valor da barreira de *default*. O impacto desta variável sobre K vai aumentando com o decrescimento de β , constatando-se de que esta relação é muito mais fraca

para quando $\beta > 0$ – cujo valor da barreira de *default* não só é maior, como também diminui mais devagar quando comparado ao caso de $\beta = 0$. Para o caso de $\beta < 0$, observa-se que quanto maior é o seu valor absoluto, maior é o impacto de T sobre K , realçando o caso particular de $\beta = -1$, que nos dá a sensação de que se $T \rightarrow \infty$, $K \rightarrow 0$.

Perrakis e Zhong (2015) explica a relação entre estas duas variáveis do ponto de vista económico tendo como base o estudo de Merton (1974) ao assumir que o capital próprio de uma empresa alavancada pode ser analisada como uma *call option*. Recuando à análise do gráfico da *volatility smile* capturada pelo Modelo CEV e aliando à interpretação de Merton (1974), conclui-se que a existência de uma relação inversa entre a volatilidade implícita do preço de uma opção e o seu preço de exercício se vai refletir na função crescente de uma *call option* em relação à sua volatilidade. Face a esta interpretação, assume-se que o capital próprio também pode seguir a mesma ideologia. O aumento antecipado de capital próprio, assumindo que todas as outras variáveis permanecem inalteradas é analisado como sendo inversamente proporcional ao valor de β . Assim sendo, quanto menor (maior) é β , maior (menor) será a apreciação do valor de capital próprio antecipado, maior (menor) será a sua volatilidade, menor (maior) será o valor de K e menor será o valor dos ativos da empresa V . Para o caso da volatilidade permanecer alta e se o valor de V continuar a diminuir, isto é para $\beta < 0$, irá ocorrer um aumento da emissão de capital próprio.

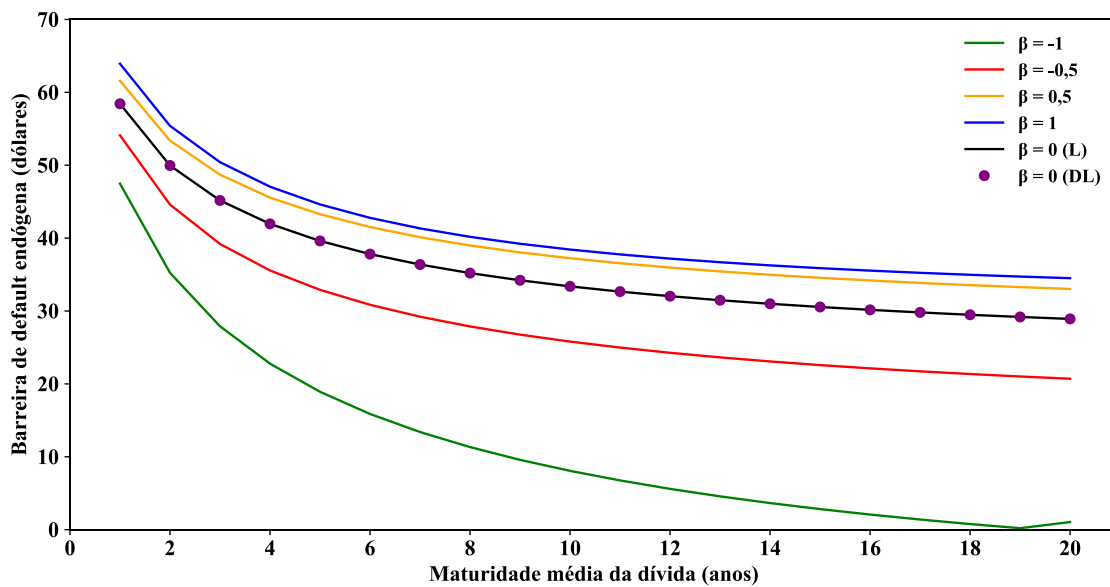


Figura 4.1: Barreira de *default* endógena em função da maturidade média da dívida. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na presente análise são estudados os casos para $\beta = \{-1; -0,5; 0,5; 1\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $D = 50$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e a barreira de *default* é determinada endogenamente.

- Influência do rácio de alavancagem

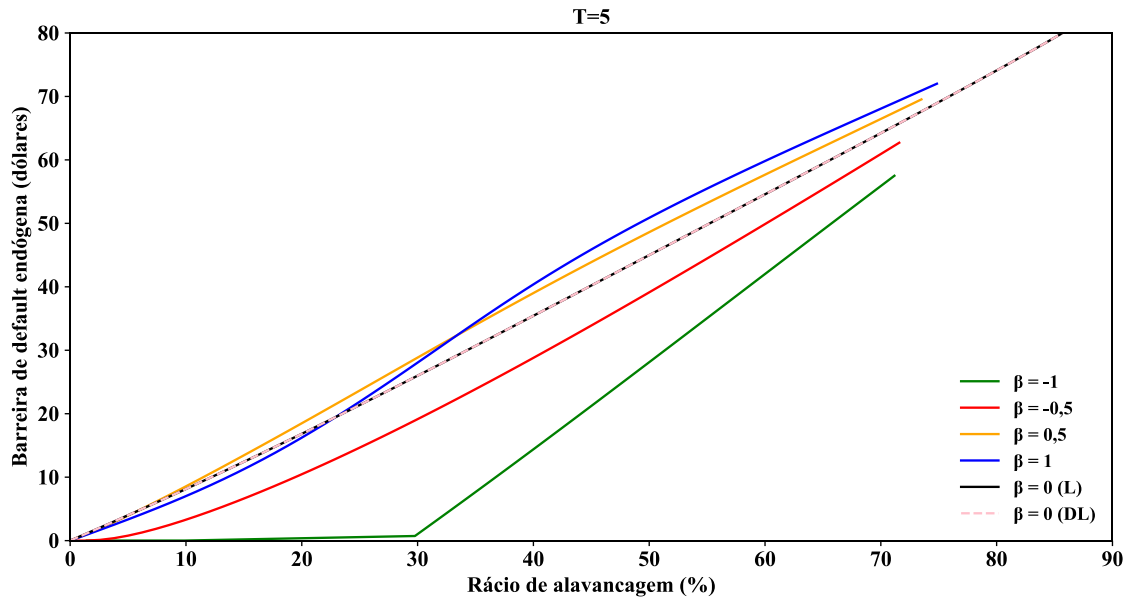
Há várias medidas de performance do estado financeiro de uma empresa, porém a estudada nesta dissertação assenta no rácio de alavancagem financeira. O rácio definido pela equação (4.1) reflete o quanto uma empresa se está a financiar a partir da emissão de dívida e do quão arriscado é investir nessa

mesma. Assim sendo, quanto maior é o rácio, maior é o montante de financiamento a partir de dívida em relação ao de capital próprio, refletindo um maior risco para os investidores.

$$\text{Rácio de alavancagem financeira} = \frac{D(g, V, K)}{v(V, K)} \quad (4.1)$$

Na Figura 4.2 está refletida a relação entre o rácio de alavancagem definido pela equação (4.1) e a barreira de *default* K tendo em conta dois tipos de maturidade média da dívida, $T = \{5, 20\}$. Observa-se que para ambas as maturidades, quanto maior é o rácio, maior é K , à exceção de $\beta = -1$, que apenas se começa a manifestar a partir de uma alavancagem aproximadamente igual a 30 % (para o caso de $T = 5$) e 44 % (para o caso de $T = 20$). Este comportamento é justificado devido ao facto de que para baixos rácios de alavancagem e para um $\beta < 0$, a empresa nunca irá escolher o *default* endógeno – isto porque, para baixos valores de K (para cerca de 0), há uma apreciação de capital próprio (a partir da sua emissão), que se torna suficientemente alta conseguindo fazer face ao pagamento dos *cash flows* necessários para que a empresa sobreviva.

Analisando a Figura 4.2 constata-se o mesmo que quando analisada a Figura 4.1, isto é, que para uma maturidade média da dívida maior, menor é o valor de K , cujo valor é ainda menor quanto menor é o valor de β . A Figura 4.2 consegue ainda captar uma relação adicional entre T e o rácio de alavancagem, isto é, para um T maior, um maior rácio de alavancagem. A relação entre estas duas variáveis é abordada em Leland (1994b) que justifica que o facto das empresas não deixarem de emitir a curto prazo – ainda que apresentem rácios de alavancagem menores que emitir dívidas a longo prazo – se deve aos baixos *agency costs*¹⁸, isto porque o incentivo ao aumento do risco empresarial passa a ser menor.



¹⁸ A forte relação entre *agency costs* e o risco empresarial observa-se sobretudo para dívidas a longo prazo e cuja relação se reflete na problemática da *asset substitution*, isto é, a longo prazo há um maior incentivo a que os acionistas de empresas altamente alavancadas possam transferir valor dos obrigacionistas para eles próprios através de uma escolha de atividades com mais risco.

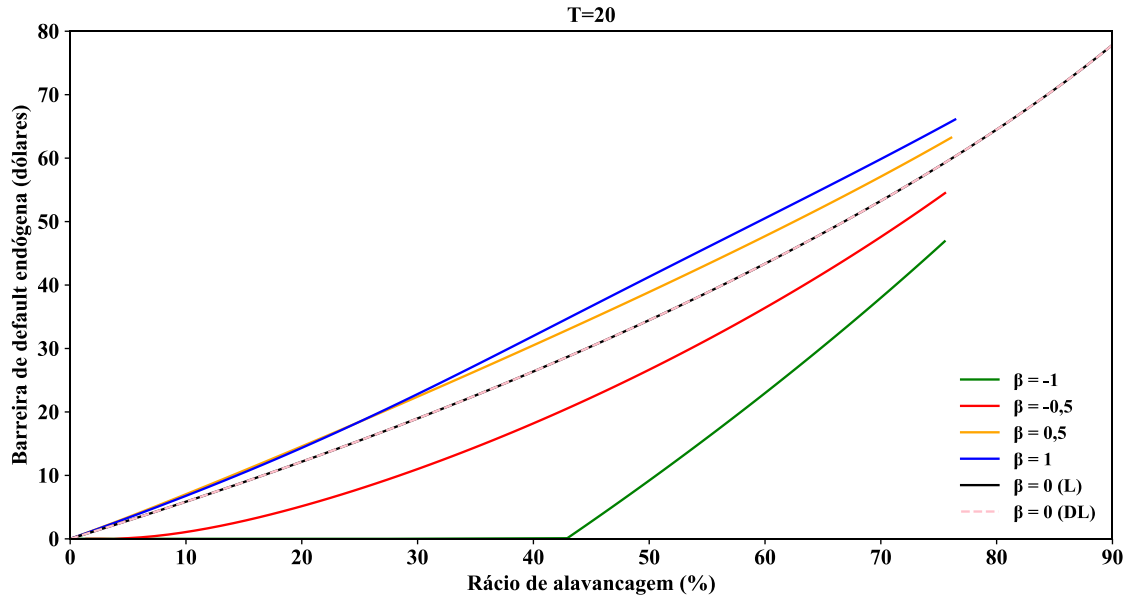


Figura 4.2: Barreira de *default* endógena em função do rácio de alavancagem para $T = \{5, 20\}$. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na análise são estudados os casos para $\beta = \{-1; -0,5; 0,5; 1\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e a barreira de *default* é determinada endogenamente.

b. *Spread* de crédito

A equação (4.2) reflete o *spread* de crédito, uma medida de risco interpretada como a taxa adicional paga por uma empresa aos seus credores de modo a compensá-los pelo risco dessa mesma entrar em *default*. Esta taxa é proporcional à probabilidade da empresa entrar em *default*, o que significa que quanto maior é o seu valor, maior é a probabilidade da empresa não sobreviver, refletindo assim o risco a que um investidor fica exposto.

$$\text{Spread de crédito} = \frac{\text{Cupão}}{D(g, V, K)} - r \quad (4.2)$$

Na Tabela 4.1 é refletido o *spread* de crédito para diferentes valores nominais da dívida $P = \{40, 50, 60\}$, diferentes maturidades médias $T = \{1, 5, 10\}$ e tendo em conta dois cenários para a determinação da barreira de *default*, isto é, para quando esta é determinada exogenamente ou endogenamente. Uma vez que a dívida é emitida ao par, neste caso em particular, o cupão C para $\beta = 0$ quando a barreira é determinada endogenamente (ver anexo D)¹⁹, será o mesmo para qualquer outro valor de β tendo em conta o mesmo P e T e aplicado a ambos os cenários da barreira de *default*. O Painel A apresenta os valores do *spread* de crédito cuja análise teve em consideração a barreira de *default*

¹⁹ Resultados iguais quer pela implementação do modelo de Leland (1994b), quer pela implementação do modelo de Davydov e Linetsky (2001) para $\beta = 0$.

exógena. Recapitulando (tendo já sido analisado no tópico d. do Capítulo 3.1.) e adaptando a esta análise uma das hipóteses apresentadas em Leland (2004), o valor da barreira exógena será igual (para todos os cenários de β) ao valor da barreira endógena para quando $\beta = 0$, tendo em conta o mesmo P e T . Assim sendo, as equações usadas para a determinação da barreira de *default* foram as equações (2.23) quando baseada na análise de Leland (1994b) e (2.39) quando baseada na análise de Davydov e Linetsky (2001). Analisando os *spreads* apresentados no Painei A, constata-se que, para uma mesma maturidade média, o *spread* de crédito aumenta com o aumento do valor nominal da dívida, independentemente do valor de β . Uma outra conclusão retirada da análise a este painei, é a de que, para um mesmo P e T , o valor de *spread* aumenta com a diminuição de β , isto porque do ponto de vista económico, uma empresa com baixo valor de V e uma volatilidade alta quando $\beta < 0$, apresentará uma maior probabilidade de entrar em *default*, cujo risco se reflete com a compensação de uma maior taxa de *spread*. Os *spreads* apresentados no Painei B tiveram em consideração a barreira de *default* endógena calculada a partir das equações (2.23) e (2.39) para o caso de $\beta = 0$ e as equações (3.24) e (3.25) para o caso de $\beta \neq 0$. Neste caso, a empresa assume que o valor que irá ditar a declaração de *default* é aquele que maximiza o valor do capital próprio (equação (2.22)), respeitando a propriedade da responsabilidade limitada de capital. Analisando o Painei B, constata-se, tal como refletido no Painei A que, para uma mesma maturidade e independentemente do valor de β , o *spread* aumenta com o aumento do valor nominal da dívida. Assim como no Painei A, o Painei B também reflete a ideia de que para um mesmo P e T , o valor de *spread* aumenta com a diminuição de β , à exceção do caso para quando $P = 60$ e $T = 1$, em que o *spread* manifesta um aumento quando $\beta > 0$ e uma diminuição quando $\beta < 0$.

Tabela 4.1: Spread de crédito em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$. O Painei A assume que a barreira de *default* é determinada exogenamente, enquanto o Painei B assume uma barreira de *default* endógena. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na análise são estudados os casos para $\beta = \{-1, -0,5, 1\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e, neste caso, tendo apenas em consideração $\beta = 0$ quando a barreira de *default* é determinada endogenamente (ver Anexo D). Para qualquer outro valor de β , o C será o mesmo que $\beta = 0$ (para quando a barreira é determinada endogenamente) tendo em conta o respetivo P e T e aplicado a qualquer que seja o painei em análise.

	1 ano			5 anos			10 anos		
P	40	50	60	40	50	60	40	50	60
Painei A: Barreira de Default Exógena									
$\beta = 1$	15,86	83,31	327,99	16,29	39,58	88,73	12,53	25,78	51,36
$\beta = 0$ (L)	17,08	88,30	340,07	22,92	54,60	114,95	22,81	46,33	85,35
$\beta = 0$ (DL)	17,08	88,30	340,07	22,92	54,60	114,95	22,81	46,33	85,35
$\beta = -0,5$	18,78	91,86	346,16	33,36	67,79	130,16	39,99	66,09	106,61
$\beta = -1$	21,30	95,86	352,05	46,13	81,42	144,14	59,09	85,23	125,17
Painei B: Barreira de Default Endógena									
$\beta = 1$	16,01	86,91	358,82	16,46	42,84	105,92	12,68	28,73	66,54
$\beta = 0$ (L)	17,08	88,30	340,07	22,92	54,60	114,95	22,81	46,33	85,35
$\beta = 0$ (DL)	17,08	88,30	340,07	22,92	54,60	114,95	22,81	46,33	85,35
$\beta = -0,5$	17,86	88,81	334,73	28,32	59,60	116,84	32,02	54,72	90,58
$\beta = -1$	18,72	89,08	330,30	33,58	62,92	116,43	41,93	60,31	91,94

Na Tabela 4.2 são apresentados os valores da barreira de *default* determinados endogenamente, sendo que os valores do cenário para $\beta = 0$ foram aqueles que foram tidos em consideração para qualquer valor de β no caso da barreira de *default* ser exógena. Analisando a Tabela 4.2, comprova-se que quanto menor (maior) é o valor de β , menor (maior) é o valor da barreira de *default* quando determinada endogenamente. Uma vez mais, esta análise sustenta a hipótese de que para um $\beta < 0$ – cuja empresa apresente um baixo valor dos seus ativos assim como uma volatilidade alta – os acionistas irão sentir-se motivados a aumentar a apreciação de capital próprio (aumentando a sua emissão), de modo a evitar que a empresa entre em falência. Este mecanismo conduz à diminuição do valor da barreira de *default*.

Assim sendo e fazendo uma ligação à análise da Tabela 4.1, contata-se que, o facto desta barreira diminuir com a diminuição de β , gera um aumento da probabilidade de *default* que neste caso se reflete num aumento do *spread* de crédito. Como já quando analisada a Figura 4.1, verificou-se que, para o caso em que $\beta = -1$, o valor da barreira de *default* tendia para zero quando a maturidade da dívida tendia para infinito, o que sustenta os valores observados na Tabela 4.2, em particular para o caso de $T = 10$.

Tabela 4.2: Barreira de *default* determinada endogenamente em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na análise são estudados os casos para $\beta = \{-1; -0,5; 1\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e, neste caso, tendo apenas em consideração $\beta = 0$ quando a barreira de *default* é determinada endogenamente (ver Anexo D). Para qualquer outro valor de β , o C será o mesmo que $\beta = 0$ (para quando a barreira é determinada endogenamente) tendo em conta o respetivo P e T .

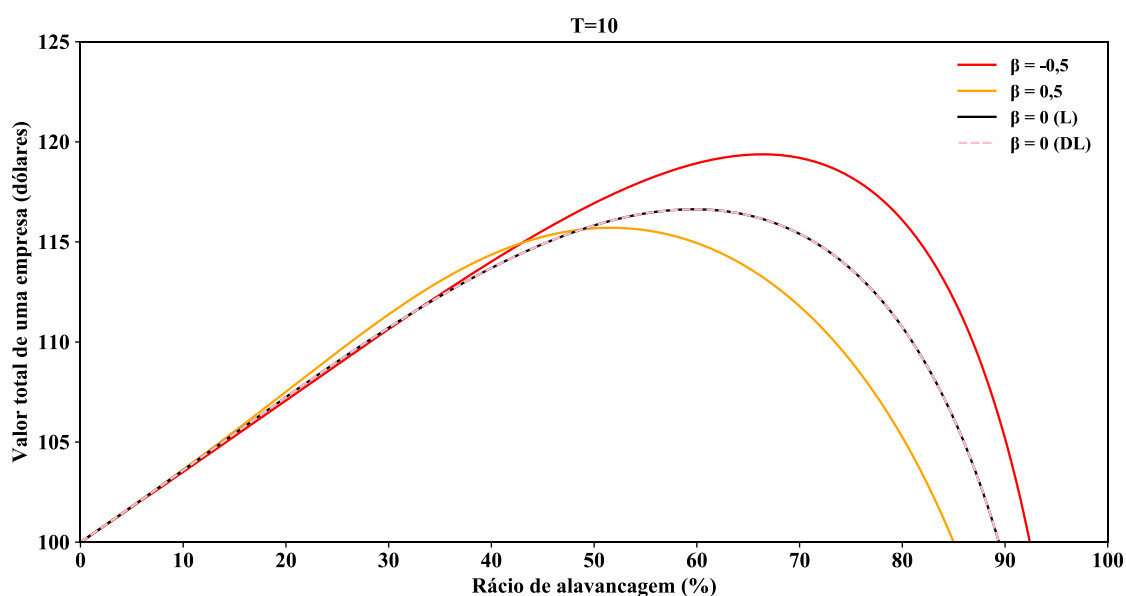
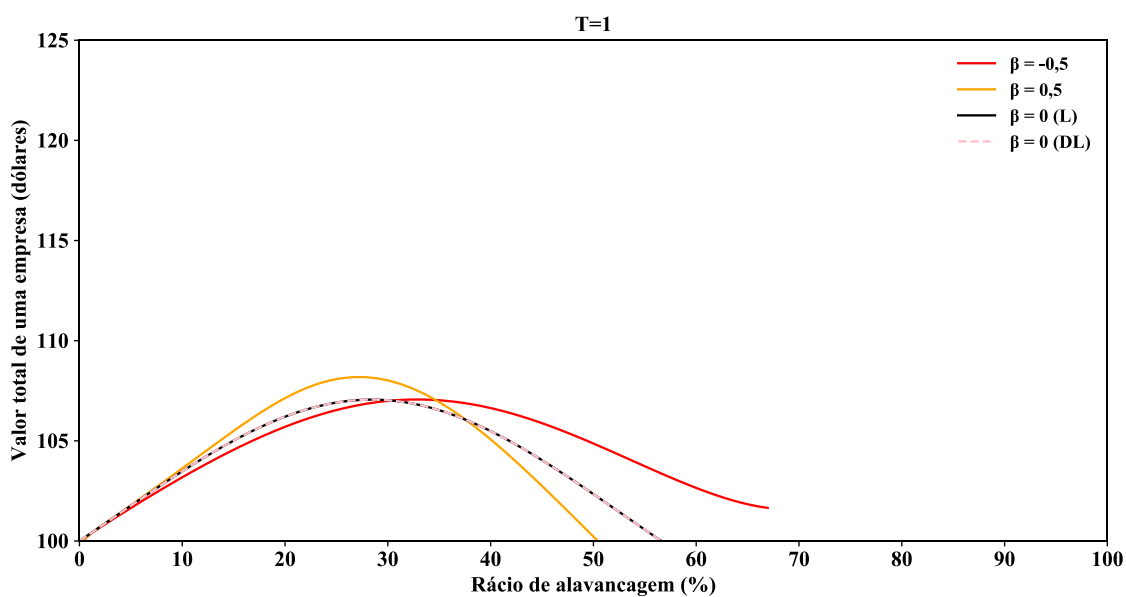
	1			5			10		
	ano			anos			anos		
P	40	50	60	40	50	60	40	50	60
Painel B: Barreira de <i>Default</i> Endógena									
$\beta = 1$	50,38	63,90	76,79	34,73	44,88	54,91	30,32	38,94	47,59
$\beta = 0$ (L)	46,84	58,43	69,60	31,54	39,61	47,97	26,49	33,38	40,59
$\beta = 0$ (DL)	46,84	58,43	69,60	31,54	39,61	47,97	26,49	33,38	40,59
$\beta = -0,5$	42,39	54,12	65,27	24,60	32,80	41,45	18,66	25,58	33,06
$\beta = -1$	34,37	47,51	59,54	7,97	18,72	29,61	0,001	7,58	17,77

c. Estrutura ótima de capital

A estrutura ótima de capital de uma empresa é aquela que maximiza o seu valor total, cuja constituição deste valor é a soma do capital próprio e da sua dívida total. Esta estrutura pode ser espelhada através do rácio de alavancagem financeira que dita o montante de dívida usado para financiar os ativos de uma empresa. Assim sendo, uma alteração no valor deste rácio – representado pela equação (4.1) – pode conduzir à maximização do valor de uma empresa.

A Figura 4.3 reflete a relação entre o rácio de alavancagem financeira e o valor total de uma empresa v tendo em conta as maturidades médias da dívida $T = \{1, 10, 20\}$. O valor total da empresa foi calculado a partir das equações (2.19) e (2.37) quando $\beta = 0$ e (3.23) quando $\beta \neq 0$.

Observa-se a partir da análise à Figura 4.3 que quanto maior é a maturidade média T , maior é o rácio de alavancagem necessário para que o valor total v aumente. A relação entre estas variáveis é mais forte a intermédio e a longo prazo para um $\beta < 0$, em que o rácio ótimo de alavancagem aumenta. Tal como anteriormente abordado na análise à Figura 4.2, não só o rácio de alavancagem tem um impacto muito maior sobre um $\beta < 0$, como o aumento da maturidade média amplifica esta relação.



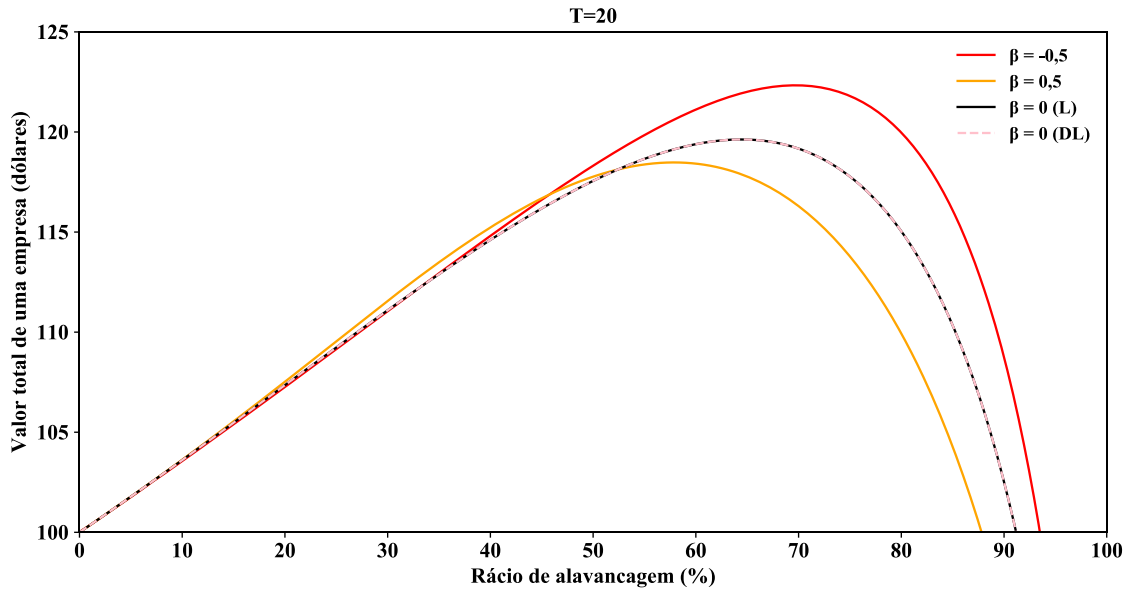


Figura 4.3: Valor total de uma empresa em função do rácio de alavancagem para $T = \{1, 10, 20\}$. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na análise são estudados os casos para $\beta = \{-0,5; 0,5\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e a barreira de *default* é determinada endogenamente.

A Tabela 4.3 apresenta as características ótimas de empresas alavancadas tendo em conta diferentes maturidades médias da dívida $T = \{1, 5, 10, \infty\}$ quando o valor máximo de v é detetado e numa primeira análise constata-se que quanto maior é a maturidade média da dívida, maior é o valor v . Para o caso de $\beta = 0$, as equações tidas em consideração foram a (2.15), (2.19), (2.21), (2.23) baseadas em Leland (1994b) e as equações (2.36), (2.37), (2.38) e (2.39) baseadas em Davydov e Linetsky (2001). Para o caso de $\beta \neq 0$, fez-se recurso às equações (3.18), (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25).

As conclusões retiradas da análise à Figura 4.3 sustentam a observação de que quanto maior é a maturidade média, maior é o rácio ótimo de alavancagem tendo um maior impacto para quando $\beta < 0$ – aplicando-se também esta observação à análise da presente tabela. Relativamente à análise dos componentes da estrutura de uma empresa, nomeadamente o capital próprio e a dívida total de uma empresa aparecem como sendo, respetivamente, uma função decrescente e crescente em relação à maturidade média T – verificando-se ainda que o impacto desta variável sobre estas duas funções é muito maior quando $\beta < 0$. O facto do valor de capital próprio diminuir com o aumento de T , provoca um aumento do valor da barreira de *default* endógena K para dívidas a curto e intermédio prazos para quando $\beta > 0$, sendo que para $\beta < 0$, dívidas com maturidade $T = 10$ já apresentam um K menor quando comparadas a dívidas emitidas com maturidades inferiores. A relação entre estas duas variáveis tende a diminuir a longo prazo para qualquer que seja o β em causa. Por fim, analisando a medida de risco abordada ao longo de toda esta dissertação, isto é, o *spread* de crédito, constata-se que apesar desta se comportar como uma função crescente em relação à variável T para o caso em que o valor do ativo subjacente segue o processo GBM, esta nunca atinge valores tão altos quando comparados aos cenários

em que $\beta < 0$. Um caso curioso de se analisar é o de $T = \infty$ ²⁰, que demonstra que apesar de $\beta = -1$ e $\beta = 1$ apresentarem um mesmo valor de K , o facto do caso $\beta = 1$ apresentar um valor total da empresa, um rácio de alavancagem e um valor de dívida total menores e um valor de capital próprio maior, culmina num valor muito inferior de *spread* de crédito aquando comparado ao cenário de $\beta = -1$.

Com todas estas análises, conclui-se que o impacto de diversas variáveis sobre os componentes da estrutura de capital de uma empresa é, na maior parte dos casos, maior para o caso em que β é negativo.

²⁰ No mundo real não é comum a emissão de dívidas perpétuas, salva raras exceções, como por exemplo, dívidas emitidas por estados soberanos.

Tabela 4.3: Características ótimas de empresas alavancadas para $T = \{1, 5, 10, \infty\}$. O processo GBM é representado pelos modelos de Leland (1994b), designado por L e o modelo de Davydov e Linetsky (2001), designado por DL. O processo CEV é representado pelo modelo de Perrakis e Zhong (2015) e na análise são estudados os casos para $\beta = \{-1; -0,5; 1\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$. Para o caso de $\beta \neq 0$, $\theta = \sigma_0 V^{-\beta}$. O valor do cupão C é determinado a partir da premissa de que a dívida é emitida ao par e a barreira de *default* é determinada endogenamente.

	Modelos	Cupão (dólares)	Barreira de <i>Default</i> endógena (dólares)	Rácio ótimo de alavancagem (percentagem)	Valor Total da Empresa (dólares)	Valor de Capital Próprio (dólares)	Valor da Dívida Total (dólares)	<i>Spread</i> de Crédito (pontos base)
1 ano de maturidade média	$\beta = 1$	2,54	38,69	28,86	110,00	78,26	31,75	0,02
	$\beta = 0$ (L)	2,44	35,68	28,44	107,06	76,61	30,45	2,30
	$\beta = 0$ (DL)	2,44	35,68	28,44	107,06	76,61	30,45	2,30
	$\beta = -0,5$	2,87	36,76	32,91	107,06	71,83	35,24	14,53
	$\beta = -1$	3,60	37,56	39,08	108,59	66,15	42,43	48,42
5 anos de maturidade média	$\beta = 1$	3,76	41,28	40,78	114,33	67,70	46,62	6,44
	$\beta = 0$ (L)	5,23	46,36	51,43	112,99	54,88	58,11	100,49
	$\beta = 0$ (DL)	5,23	46,36	51,43	112,99	54,88	58,11	100,49
	$\beta = -0,5$	7,12	51,01	61,03	115,44	44,99	70,45	210,66
	$\beta = -1$	8,70	51,82	67,06	119,44	39,34	80,09	286,22
10 anos de maturidade média	$\beta = 1$	4,58	43,28	47,75	116,83	61,04	55,78	21,01
	$\beta = 0$ (L)	6,60	48,09	59,71	116,63	46,99	69,64	147,44
	$\beta = 0$ (DL)	6,60	48,09	59,71	116,63	46,99	69,64	147,44
	$\beta = -0,5$	8,07	49,51	66,40	119,38	40,11	79,26	218,12
	$\beta = -1$	9,09	46,98	70,45	123,37	36,46	86,91	245,89
Maturidade média infinita	$\beta = 1$	4,99	36,23	50,77	120,97	59,55	61,42	12,47
	$\beta = 0$ (L)	8,38	45,38	70,58	124,43	36,61	87,82	153,84
	$\beta = 0$ (DL)	8,38	45,38	70,58	124,43	36,61	87,82	153,84
	$\beta = -0,5$	9,20	42,98	74,66	126,85	32,14	94,71	171,42
	$\beta = -1$	9,75	36,23	77,44	130,43	29,43	101,00	165,33

5. Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo apresentar as soluções de fórmula fechada dos componentes da estrutura de capital de uma empresa, nomeadamente, da dívida total, do capital próprio e do valor total de uma empresa, assumindo que os ativos dessa empresa seguem o processo GBM e CEV. Os modelos apresentados no Capítulo 2 assim como o modelo apresentado no Capítulo 3 assentaram no mesmo ponto de partida ao assumir que a dívida segue um processo *roll over* – solução encontrada por Leland, em 1994b, para poder analisar não só obrigações com maturidade arbitrária, como também para garantir que os *cash flows* dessa mesma dívida permaneceriam homogêneos ao longo do tempo.

Assumindo o processo GBM, foram apresentados dois estudos diferentes. O primeiro estudo, assim como adotado posteriormente no segundo, assentaram na análise de Leland (1994b) ao comparar o mecanismo da dívida a um *sinking fund provision*; do primeiro para o segundo modelo, a diferença assentou somente no cálculo da distribuição de probabilidade do valor atual de um dólar caso ocorra *default* em que a função representada pela equação (2.12) deu lugar à equação (2.35), cuja solução ϕ_λ é uma das soluções da equação ordinária (2.26) propostas por Davydov e Linetsky (2001). A análise foi particularizada para a solução ϕ_λ uma vez que esta se foca no caso em que o valor dos ativos de uma empresa está a decrescer – existindo a possibilidade de V decrescer tanto que se iguale ao valor que desencadeia a falência K . Após a implementação de ambos os modelos, constata-se dois pontos: que não só se obtêm os mesmos resultados quando comparados os modelos entre si, como também apresentam os mesmos resultados (apresentados na presente dissertação) quando comparados com os resultados apresentados em Perrakis e Zhong (2015).

Assumindo o processo CEV, o estudo incidiu sobre as soluções de fórmula fechada propostas por Perrakis e Zhong (2015), em que cujas soluções incidem uma vez mais no estudo da dívida como um processo *roll over*, preservando assim o seu comportamento estacionário. Uma vez assumido este processo, o cálculo da distribuição de probabilidade do valor atual de um dólar caso ocorra *default* assenta uma vez mais na solução de ϕ_λ , que neste caso, é uma das soluções da equação ordinária (3.14) propostas por Davydov e Linetsky (2001). O que se verifica quando analisado este processo é que a variável β influencia o cálculo de todos os componentes da estrutura de capital de uma empresa, cuja reflexão é justificada devido à relação existente entre o valor dos ativos de uma empresa e a sua volatilidade. Analisando este tópico de um ponto de vista económico, conclui-se que empresas altamente alavancadas – para o caso em que $\beta < 0$, isto é, existindo uma relação inversa entre o valor dos seus ativos e a volatilidade – perante um aumento de volatilidade e um decrescimento contínuo do valor dos ativos, a empresa motiva os seus acionistas a emitirem mais capital próprio de modo a que o valor para a qual a falência é desencadeada diminua, evitando assim que esta declare falência. Perante todo este cenário, a probabilidade da empresa entrar em *default* aumenta, refletindo-se este risco num aumento de *spread* de crédito. Relativamente à implementação deste modelo quando comparado à implementação dos modelos assumindo o processo GBM, constata-se não só que este modelo é muito mais difícil e mais demorado, como também é mais preciso e mais fiável, uma vez que reflete melhor as características dos mercados. Para além destas características, verificou-se também que este modelo é bastante sensível e que qualquer pequena alteração na sua implementação e/ou processo de otimização alternativo pode produzir resultados diferentes. Exemplo disso, foram os resultados obtidos por Perrakis e Zhong (2015) nas Tabelas 1 e 2 do respetivo artigo quando comparados com os resultados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.3 da presente dissertação.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M., e Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover.
- Black, F., e Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*. 81, 3, 637-654.
- Black, F. (1975). Fact and Fantasy in the Use of Options. *Financial Analysts Journal*. 31, 4, 36-41 e 61-72.
- Black, F., e Cox, J. C. (1976). Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions. *The Journal of Finance*. 31, 2, 351-367.
- Borodin, A. N., e Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*. (2ª Edição). Basel: Birkhauser Verlag.
- Cox, J. C., e Ross, S. A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*. 3, 145-166.
- Cox, J. C. (1996). The constant elasticity of variance option pricing model. *The Journal of Portfolio Management*. 23, 5, 15-17.
- Davydov, D., e Linetsky, V. (2001). Pricing and Hedging Path-Dependent Options Under the CEV Process. *Management Science*. 47, 7, 949-965.
- Huang, J-Z., e Huang, M. (2003). How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?. (Working paper). Penn State and Stanford University.
- Hull, J. C. (2015). *Options, Futures, and Other Derivatives*. (9ª Edição). Upper Sadle River: Prentice Hall.
- Leland, H. E. (1994a). Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure. *The Journal of Finance*. 49, 4, 1213-1252.
- Leland, H. E. (1994b). *Bond prices, yield spreads, and optimal capital structure with default risk*. (Working paper No. 240). University of California at Berkeley: IBER.
- Leland, H. E., e Toft, K. B. (1996). Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads. *The Journal of Finance*. 51, 3, 987-1019.
- Leland, H. E. (2004). Predictions of Default Probabilities in Structural Models of Debt. Disponível em:
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=13B720F3C251E641CBCBDB5314F0C481?doi=10.1.1.139.2110&rep=rep1&type=pdf>. (Acedido a: 19-07-2020).

Longstaff, F. A., e Schwartz, E. S. (1995). A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *The Journal of Finance*. 50, 789–819.

Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*. 4, 1, 141-183.

Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*. 29, 2, 449-470.

Modigliani, F., e Miller M. H. (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *The American Economic Review*. 48, 3, 261-297.

Modigliani, F., e Miller, M. H. (1963). Corporate Income Taxes and the Cost of Capital : A Correction. *The American Economic Review*. 53, 3, 433–443.

Perrakis, S., e Zhong, R. (2015). Credit spreads and state-dependent volatility: Theory and empirical evidence. *Journal of Banking & Finance*. 55, 215–231.

Anexos

A. Demonstração da equação (2.39)

Uma vez que K é definido como a barreira *knock-out* e definido no Capítulo 2.1 como a barreira de *default* determinada endogenamente, a condição necessária para a determinação da fórmula fechada desta expressão assenta na *smooth-pasting condition* definida pela equação (2.22) para quando $V = K$.

$$\begin{aligned}
 E(g, V, K) &= V + \left(\frac{wC}{r}\right) \left(1 - \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) - \alpha K \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) - \left(\frac{C + gP}{r + g}\right) \left(1 - \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right) \\
 &\quad - (1 - \alpha)K \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right) \\
 \frac{\partial E(g, V, K)}{\partial V} &= 1 - \left(\frac{wC}{r} \times \frac{1}{\phi_r(K)} \times \frac{\partial \phi_r(V)}{\partial V}\right) - \left(\alpha K \times \frac{1}{\phi_r(K)} \times \frac{\partial \phi_r(V)}{\partial V}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{C + gP}{r + g} \times \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \times \frac{\partial \phi_{r+g}(V)}{\partial V}\right) - \left[(1 - \alpha)K \times \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \times \frac{\partial \phi_{r+g}(V)}{\partial V}\right]
 \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\frac{\partial \phi_r(V)}{\partial V} = \gamma_-(r) \times V^{\gamma_-(r)-1}, \quad \frac{\partial \phi_{r+g}(V)}{\partial V} = \gamma_-(r + g) \times V^{\gamma_-(r+g)-1}, \quad V = K \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned}
 &1 - \left(\frac{wC}{r} \times K^{-\gamma_-(r)} \times \gamma_-(r) \times K^{\gamma_-(r)-1}\right) - (\alpha K \times K^{-\gamma_-(r)} \times \gamma_-(r) \times K^{\gamma_-(r)-1}) \\
 &+ \left(\frac{C + gP}{r + g} \times K^{-\gamma_-(r+g)} \times \gamma_-(r + g) \times K^{\gamma_-(r+g)-1}\right) \\
 &- [(1 - \alpha)K \times K^{-\gamma_-(r+g)} \times \gamma_-(r + g) \times K^{\gamma_-(r+g)-1}] = 0 \\
 &1 - \left(\frac{wC}{r} \times \gamma_-(r) \times K^{-1}\right) - (\alpha \times \gamma_-(r)) + \left(\frac{C + gP}{r + g} \times K^{-1} \times \gamma_-(r + g)\right)
 \end{aligned}$$

$$-[(1-\alpha) \times \gamma_-(r+g)] = 0$$

$$K = \frac{\left[\left(\frac{C+g^P}{r+g} \times \gamma_-(r+g) \right) - \left(\frac{wC}{r} \times \gamma_-(r) \right) \right]}{-1 + (\alpha \times \gamma_-(r)) + (1-\alpha) \times \gamma_-(r+g)}$$

□

B. Demonstração do Lema 3

Uma vez que o valor de capital próprio tem de satisfazer a equação diferencial (3.19) assumindo que os ativos seguem uma volatilidade não constante $\sigma(V) = \theta V^\beta$ e tendo em consideração as duas condições de fronteira apresentadas pelas equações (3.20) e (3.21), é conjecturada uma solução para esta equação diferencial,

$$E(g, V, K) = V + \frac{wC}{r} [1 - F'(V)] - \alpha K F'(V) - [A_0 + A_1 F''(V)], \quad (\text{B.1})$$

onde,

$$F'(V) = \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \quad (\text{B.2})$$

$$F''(V) = \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \quad (\text{B.3})$$

$$A_0 = \frac{C + gP}{r + g} \quad (\text{B.4})$$

e

$$A_1 = (1 - \alpha)K - \frac{C + gP}{r + g} = (1 - \alpha)K - A_0 \quad (\text{B.5})$$

Para a demonstração deste lema, é designado por $w_{k.m}(\chi(V))$ as funções de *Whittaker* definidas pelas equações (13.1.33) e (13.1.32) em Abramowitz e Stegun (1972, página 505), em que

$$w_{k.m}(\chi(V)) = \begin{cases} W_{k.m}(\chi(V)), & \text{se } \beta < 0 \\ M_{k.m}(\chi(V)), & \text{se } \beta > 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Antes de se partir para a demonstração da solução analítica da equação (3.19), é necessário serem demonstradas as duas condições de fronteira. Para a demonstração da igualdade definida pela equação (3.20), aplica-se a igualdade $V = K$ na equação (B.1), que se reflete em,

$$\begin{aligned} E(K) &= K + \frac{wC}{r} \left[1 - \frac{\phi_r(K)}{\phi_r(K)} \right] - \alpha K \frac{\phi_r(K)}{\phi_r(K)} - \left[A_0 + ((1 - \alpha)K - A_0) \frac{\phi_{r+g}(K)}{\phi_{r+g}(K)} \right] \\ &= K - \alpha K - A_0 - K + \alpha K + A_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para a demonstração da condição de fronteira definida pela equação (3.21) é necessário mostrar que,

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F''(V) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Para provar o limite (B.7)²¹,

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \\ &= \frac{1}{\phi_r(K)} \lim_{V \rightarrow \infty} \phi_r(V) \\ &= \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} w_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)), \end{aligned}$$

Segundo a equação (3.9), $r - q \neq 0$, logo o estudo do limite será apenas feito para os casos $(r - q) \leq 0$. Para o caso de $\beta < 0$ ²² e:

- **$(r - q) > 0$:**

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} w_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)),$$

onde, $w_{k.m}(\chi(V)) = W_{k.m}(\chi(V))$.

Usando a equação (13.1.33) de Abramowitz e Stegun (1972, página 505), temos que:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \frac{1}{K^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))}$$

²¹ A demonstração do limite definido pela equação (B.8) segue um procedimento similar.

²² Para $\beta > 0$ o procedimento é similar ao seguidamente demonstrado.

$$\times \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^{\frac{1}{2}+m} U\left(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m, \chi(V)\right) \right] \right\},$$

sendo $U(a, b, z)$ a função de *Kummer* definida pela equação (13.1.3) em Abramowitz e Stegun (1972, página 504). Tendo em conta que $\beta < 0$, o $\lim_{V \rightarrow \infty} \chi(V) = +\infty$ e recorrendo à equação (13.1.8) de Abramowitz e Stegun (1972, página 504), segue-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^{\frac{1}{2}+m} \chi(V)^{-(\frac{1}{2}+m-k)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^k \right] \right\} \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\chi(V)\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2}\right)} \chi(V)^k \right] \end{aligned}$$

Evocando as equações (3.10), (3.11) e (3.13), temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\chi(V)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2} - 2\beta k} \right] \times e^{-\infty} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right)^k \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k,m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta \left\{ -2 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right] + 1 \right\} + \frac{1}{2}} \right] \times e^{-\infty} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right)^k \end{aligned}$$

Uma vez que $\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right)^k$ é uma constante e assumindo que $r > 0$ tal que $\beta \left\{ -2 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right] + 1 \right\} + \frac{1}{2} < 0$, então o limite é igual a zero,

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \frac{1}{\phi_r(K)} \times \left[0 \times \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} \right)^k \times e^{-\infty} \right] = 0$$

- $(r - q) < 0$:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} w_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)),$$

onde, $w_{k.m}(\chi(V)) = W_{k.m}(\chi(V))$.

Usando a equação (13.1.33) de Abramowitz e Stegun (1972, página 505), temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \\ &\times \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^{\frac{1}{2}+m} U\left(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m, \chi(V)\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

sendo $U(a, b, z)$ a função de Kummer definida pela equação (13.1.3) em Abramowitz e Stegun (1972, página 504). Tendo em conta que $\beta < 0$, o $\lim_{V \rightarrow \infty} \chi(V) = +\infty$ e recorrendo à equação (13.1.8) de Abramowitz e Stegun (1972, página 504), segue-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^{\frac{1}{2}+m} \chi(V)^{-\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\{ \left(V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \right) \left[e^{-\frac{1}{2}\chi(V)} \chi(V)^k \right] \right\} \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\chi(V)\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2}\right)} \chi(V)^k \right] \end{aligned}$$

Evocando as equações (3.10), (3.11) e (3.13), temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\chi(V)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{|r - q|}{\theta^2 |\beta|} V^{-2\beta} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta + \frac{1}{2} - 2\beta k} \right] \times e^0 \left(\frac{|r - q|}{\theta^2 |\beta|} \right)^k \\ &= \frac{1}{K^{\beta + \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(K)} W_{k.m}(\chi(K))} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[V^{\beta \left\{ -2 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} + 1 \right] + \frac{1}{2} \right\}} \right] \times e^0 \left(\frac{|r - q|}{\theta^2 |\beta|} \right)^k \end{aligned}$$

Uma vez que $\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}\right)^k$ é uma constante e assumindo que $r > 0$ tal que $\beta \left\{-2 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta}\right) - \frac{r}{2|(r-q)\beta|}\right] + 1\right\} + \frac{1}{2} < 0$, então o limite é igual a zero,

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F'(V) = \frac{1}{\phi_r(K)} \times \left[0 \times e^0 \times \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}\right)^k \right] = 0$$

Uma vez demonstradas as duas condições de fronteira, poderá proceder-se à demonstração da solução analítica da equação (3.19). Para tal, será necessário determinar a primeira e a segunda derivada da equação (B.2) e (B.3).

- Recordando que $F'(V)$ é dado pela equação (B.2), o cálculo da primeira derivada em ordem a V é dado por,

$$\begin{aligned} F'_V(V) &= \frac{\partial \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right)}{\partial V} \\ &= \frac{1}{\phi_r(K)} \times \frac{\partial \phi_r(V)}{\partial V} \\ &= \frac{1}{\phi_r(K)} \times \frac{\partial \left(V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right)}{\partial V} \\ &= \frac{1}{\phi_r(K)} \times \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right. \\ &\quad \left. + V^{\beta+\frac{1}{2}} \left(\frac{\epsilon}{2} \times \frac{\partial \chi(V)}{\partial V} \right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right. \\ &\quad \left. + V^{\beta+\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \left(\frac{\partial \chi(V)}{\partial V} \right) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \right] \end{aligned}$$

Dado que,

$$\frac{\partial \chi(V)}{\partial V} = \frac{-2\beta}{V} \chi(V), \quad (B.9)$$

então,

$$F'_V(V) = \frac{1}{\phi_r(K)} \times \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right.$$

$$\begin{aligned}
& +V^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{\epsilon}{2}\times\frac{-2\beta}{V}\chi(V)\right)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V)) \\
& +V^{\beta+\frac{1}{2}}e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}\left(\frac{-2\beta}{V}\chi(V)\right)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\Big] \\
& =\frac{1}{\phi_r(K)}\times\left[\left(\beta+\frac{1}{2}\right)V^{\beta-\frac{1}{2}}e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V))\right. \\
& \quad -V^{\beta-\frac{1}{2}}\epsilon\beta\chi(V)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V)) \\
& \quad \left.-V^{\beta-\frac{1}{2}}2\beta\chi(V)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\right]
\end{aligned}$$

Dado que,

$$\phi_r(V) = V^{\beta+\frac{1}{2}}e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V)), \quad (\text{B.10})$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
F'_V(V) &= \frac{1}{\phi_r(K)}\times\left[\left(\beta+\frac{1}{2}\right)V^{\beta-\frac{1}{2}+1}\frac{1}{V}e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V))\right. \\
& \quad -V^{\beta-\frac{1}{2}+1}\frac{1}{V}\epsilon\beta\chi(V)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V)) \\
& \quad \left.-V^{\beta-\frac{1}{2}+1}\frac{1}{V}2\beta\chi(V)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)}\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}w_{k.m}(\chi(V))\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))}\right] \\
&= \frac{1}{\phi_r(K)}\times\left[\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{V}\phi_r(V)\right. \\
& \quad -\frac{1}{V}\epsilon\beta\chi(V)\phi_r(V) \\
& \quad \left.-\frac{1}{V}2\beta\chi(V)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))}\phi_r(V)\right] \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Segue-se o cálculo da segunda derivada de $F'(V)$ em ordem a V ,

$$\begin{aligned}
F'_{VV}(V) &= \frac{\partial^2 \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right)}{\partial V^2} \\
&= \frac{F'_V(V)}{\partial V} \\
&= \frac{1}{\phi_r(K)} \times \left(\frac{\partial a(V)}{\partial V} - \frac{\partial b(V)}{\partial V} - \frac{\partial c(V)}{\partial V} \right),
\end{aligned} \tag{B.12}$$

onde,

$$a(V) = \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V))$$

$$b(V) = V^{\beta - \frac{1}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V))$$

$$c(V) = V^{\beta - \frac{1}{2}} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)}$$

Assim sendo, as derivadas em ordem a V das funções acima apresentadas são, respetivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a(V)}{\partial V} &= \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{1}{2}} \left(\frac{\epsilon - 2\beta}{2} \chi(V) \right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{1}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \left(\frac{-2\beta}{V} \chi(V) \right) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
&= \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2}} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b(V)}{\partial(V)} &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right) V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} \epsilon \beta \left(\frac{-2\beta}{V} \chi(V)\right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} \epsilon \beta \chi(V) \left(\frac{\epsilon-2\beta}{2} \frac{\chi(V)}{V}\right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \left(\frac{-2\beta}{V} \chi(V)\right) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
&= \left(\beta - \frac{1}{2}\right) V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - V^{\beta-\frac{3}{2}} 2 \epsilon \beta^2 \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - V^{\beta-\frac{3}{2}} 2 \epsilon \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(V)}{\partial(V)} &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right) V^{\beta-\frac{3}{2}} 2 \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} 2 \beta \left(\frac{-2\beta}{V} \chi(V)\right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} 2 \beta \chi(V) \left(\frac{\epsilon}{2} \times \frac{-2\beta}{V} \chi(V)\right) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
&\quad + V^{\beta-\frac{1}{2}} 2 \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \left(\frac{-2\beta}{V} \chi(V)\right) \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \\
&= \left(\beta - \frac{1}{2}\right) V^{\beta-\frac{3}{2}} 2 \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -V^{\beta-\frac{3}{2}}4\beta^2\chi(V)e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& -V^{\beta-\frac{3}{2}}2\beta^2\chi(V)^2\epsilon e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& -V^{\beta-\frac{3}{2}}4\beta^2\chi(V)^2e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Recordando a igualdade definida em (B.12) e substituída pelas equações (B.13), (B.14) e (B.15),

$$\begin{aligned}
F'_{VV}(V) = \frac{1}{\phi_r(K)} & \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{3}{2}} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right. \\
& - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
& - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{3}{2}} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
& + V^{\beta-\frac{3}{2}} 2\epsilon \beta^2 \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
& + V^{\beta-\frac{3}{2}} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
& + V^{\beta-\frac{3}{2}} 2\epsilon \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta-\frac{3}{2}} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& + V^{\beta-\frac{3}{2}} 4\beta^2 \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& + V^{\beta-\frac{3}{2}} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \\
& \left. + V^{\beta-\frac{3}{2}} 4\beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\phi_r(K)} \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \right. \\
&\quad - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
&\quad - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \\
&\quad + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
&\quad - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
&\quad + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V) e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
&\quad + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
&\quad \left. + V^{\beta - \frac{3}{2} + 2} \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V)^2 e^{\frac{\epsilon}{2}\chi(V)} \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} w_{k.m}(\chi(V)) \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

Recorrendo à equação (B.10),

$$\begin{aligned}
F'_{VV}(V) &= \frac{1}{\phi_r(K)} \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \phi_r(V) \right. \\
&\quad - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_r(V) \\
&\quad \left. - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V) \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \Big] \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Tendo em conta que a equação (B.3) é definida como $F''(V) = \frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}$, é possível afirmar que para o cálculo da primeira e da segunda derivada desta equação, o único parâmetro que irá sofrer alterações, comparativamente à primeira e segunda derivada de $F'(V)$, será o parâmetro k que influenciará apenas as funções de *Whittaker* assim como a função ϕ_λ em que $\lambda = r + g$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
F''_V(V) &= \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \times \left[\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{V} \phi_{r+g}(V) \right. \\
& \quad - \frac{1}{V} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \\
& \quad \left. - \frac{1}{V} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right] \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$F''_{VV}(V) = \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \left[\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{V^2} \phi_{r+g}(V) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \\
& - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V) \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \Big] \tag{B.18}
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$rE(g, V, K) = (r - q)VE_V + \frac{1}{2}(\sigma(V))^2 V^2 E_{VV} + qV - (1 - w)C + gD(g, V, K) - gP,$$

onde,

$$E_V = 1 - \frac{wC}{r} F'_V(V) - \alpha K F'_V(V) - A_1 F''_V(V) \tag{B.19}$$

$$E_{VV} = -\frac{wC}{r} F'_{VV}(V) - \alpha K F'_{VV}(V) - A_1 F''_{VV}(V) \tag{B.20}$$

e sabendo que $\sigma(V) = \theta V^\beta$, então,

$$\begin{aligned} rE(g, V, K) &= (r - q)V \left(1 - \frac{wC}{r} F'_V(V) - \alpha K F'_V(V) - A_1 F''_V(V) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} \left(-\frac{wC}{r} F'_{VV}(V) - \alpha K F'_{VV}(V) - A_1 F''_{VV}(V) \right) \\ &\quad + qV - (1 - w)C + gD(g, V, K) - gP \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita do seguinte modo,

$$rE(g, V, K) = h(V) + i(V) + qV - (1 - w)C + gD(g, V, K) - gP \quad (\text{B.21})$$

em que,

$$h(V) = (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left[(r - q)V F'_V(V) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} F'_{VV}(V) \right] \quad (\text{B.22})$$

$$i(V) = -A_1 \left[(r - q)V F''_V(V) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} F''_{VV}(V) \right] \quad (\text{B.23})$$

➤ Resolvendo a equação (B.22), temos que,

$$\begin{aligned} h(V) &= (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left[(r - q)V F'_V(V) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} F'_{VV}(V) \right] \\ &= (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left\{ (r - q)V \frac{1}{\phi_r(K)} \right. \\ &\quad \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V} \phi_r(V) - \frac{1}{V} \epsilon \beta \chi(V) \phi_r(V) - \frac{1}{V} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} \frac{1}{\phi_r(K)} \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \phi_r(V) - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_r(V) \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_r(V) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon\beta^2\chi(V)\phi_r(V) + \frac{1}{V^2}\epsilon^2\beta^2\chi(V)^2\phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\epsilon\beta^2\chi(V)^2 \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& - \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{V^2} 2\beta\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 2\beta^2\chi(V)^2\epsilon \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \\
& + \frac{1}{V^2} 4\beta^2\chi(V)^2 \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)^2} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_r(V) \Big] \Big\} \\
& = (r-q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) \left[(r-q) \left(\beta + \frac{1}{2}\right) - (r-q)\epsilon\beta\chi(V) \right. \\
& \quad - (r-q)2\beta\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& \quad + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \epsilon\beta\chi(V) \\
& \quad - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) 2\beta\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \epsilon\beta\chi(V) \\
& \quad + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} 2\epsilon\beta^2\chi(V) + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \epsilon^2\beta^2\chi(V)^2 \\
& \quad + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} 2\epsilon\beta^2\chi(V)^2 \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& \quad - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) 2\beta\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} 4\beta^2\chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} 4\beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \Big]
\end{aligned}$$

Quando $\beta < 0$ ²³, $w_{k.m}(\chi(V)) = W_{k.m}(\chi(V))$ e de acordo com as equações (13.4.33) e (13.1.31) em Abramowitz e Stegun (1972, página 507 e 505), representadas respetivamente por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \\
\frac{\partial^2 W_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} &= \frac{[\chi(V)^2 - 4k\chi(V) + 4m^2 - 1] W_{k.m}(\chi(V))}{4\chi(V)^2}
\end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
h(V) &= (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \left\{ (r - q) \left(\beta + \frac{1}{2} \right) - (r - q) \epsilon \beta \chi(V) \right. \\
&\quad \left. - (r - q) 2\beta \chi(V) \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \epsilon \beta \chi(V) \right. \\
&\quad \left. - \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \epsilon \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \epsilon \beta^2 \chi(V) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 \right. \\
&\quad \left. + \theta^2 V^{2\beta} \epsilon \beta^2 \chi(V)^2 \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \right. \\
&\quad \left. - \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

²³ Para $\beta > 0$, $w_{k.m}(\chi(V)) = M_{k.m}(\chi(V))$, cujo procedimento é similar ao seguidamente demonstrado.

$$\begin{aligned}
& +2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \\
& +\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 \epsilon \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)} \right) W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \right] \\
& +2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 \frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))} \left[\frac{(\chi(V)^2 - 4k\chi(V) + 4m^2 - 1)W_{k.m}(\chi(V))}{4\chi(V)^2} \right] \Big\} \\
& = (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} - (r - q)\epsilon\beta\chi(V) \right. \\
& \quad - (r - q)\beta\chi(V) + (r - q)2\beta k + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 - \frac{1}{8}\theta^2 V^{2\beta} \\
& \quad - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \epsilon\beta\chi(V) - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& \quad + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \epsilon\beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \epsilon\beta^2 \chi(V) \\
& \quad + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \epsilon\beta^2 \chi(V)^2 - \theta^2 V^{2\beta} \epsilon\beta^2 \chi(V)k \\
& \quad - \theta^2 V^{2\beta} \epsilon\beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& \quad + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k \\
& \quad - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 \epsilon - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \epsilon k \\
& \quad \left. - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \epsilon \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 (\chi(V)^2 - 4k\chi(V) + 4m^2 - 1) \right] \quad (B.24)
\end{aligned}$$

Uma vez que o caso em estudo é $\beta < 0$ e assumindo que:

- $(r - q) > 0$, então $\epsilon = -1$,

$$\begin{aligned}
h(V) = & (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} + (r - q)\beta\chi(V) \right. \\
& - (r - q)\beta\chi(V) + (r - q)2\beta k + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 - \frac{1}{8}\theta^2 V^{2\beta} \\
& + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\beta\chi(V) - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\beta\chi(V) - \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \\
& + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)k \\
& + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 k \\
& - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)k \\
& + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 k\chi(V) \\
& \left. + 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 m^2 - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 \right]
\end{aligned}$$

Tendo em conta que k é definido pela equação (3.13),

$$\begin{aligned}
h(V) = & (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} \right. \\
& \left. + (r - q)2\beta \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r - q)\beta|}\right) + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right) \\
& +\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \\
& -\frac{1}{4} \theta^2 V^{2\beta} \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \\
& +\frac{1}{4} \theta^2 V^{2\beta} \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right) \\
& -\frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right) + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \\
& -\frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} - \frac{r}{2|(r-q)\beta|} \right) \\
& -2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \Big] \\
& = (r-q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \left[(r-q)\beta + (r-q)\frac{1}{2} - (r-q)\beta - (r-q)\frac{1}{2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\beta(r-q)r}{2|(r-q)\beta|} + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

Tendo em consideração a equação (3.10),

$$\begin{aligned}
h(V) &= (r-q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \left[-\frac{(r-q)\beta r}{|(r-q)\beta|} + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right. \\
&\quad \left. + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2 |\beta|} V^{-2\beta} \right) \right] \\
&= (r-q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)} \right) \left[-\frac{(r-q)\beta r}{|(r-q)\beta|} + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right. \\
&\quad \left. + 2|r-q| \frac{\beta^2}{|\beta|} \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right],
\end{aligned}$$

e uma vez que $\beta < 0$ e $(r - q) > 0$,

$$h(V) = (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) [-(-1)r] \quad (\text{B.25})$$

- $(r - q) < 0$, então $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned} h(V) = & (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} - (r - q)\beta\chi(V) \right. \\ & - (r - q)\beta\chi(V) + (r - q)2\beta k + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 - \frac{1}{8}\theta^2 V^{2\beta} \\ & - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \beta\chi(V) - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \beta k \\ & + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \\ & + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)k \\ & - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \beta k \\ & + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k \\ & - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)k \\ & - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k\chi(V) \\ & \left. + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 m^2 - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \right] \end{aligned}$$

Tendo em conta que k é definido pela equação (3.13),

$$h(V) = (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} - 2(r - q)\beta\chi(V) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +2\beta(r-q)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\beta}-\frac{r}{2|(r-q)\beta|}\right)+2\beta(r-q)\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \\
& +2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2-4\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\beta}-\frac{r}{2|(r-q)\beta|}\right) \\
& -2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}\Big] \\
& = (r-q)V-\left(\frac{wC}{r}+\alpha K\right)\left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right)\left[2\beta(r-q)+(r-q)-2(r-q)\beta\chi(V)-\frac{(r-q)\beta r}{|(r-q)\beta|}\right. \\
& \quad + (r-q)2\beta\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}+2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2-2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)-\theta^2V^{2\beta}\beta\chi(V) \\
& \quad \left. +\frac{2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)r}{|(r-q)\beta|}-2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}\right]
\end{aligned}$$

Tendo em consideração a equação (3.10),

$$\begin{aligned}
h(V) &= (r-q)V-\left(\frac{wC}{r}+\alpha K\right)\left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right)\left[2\beta(r-q)+(r-q)-2(r-q)\beta\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right)\right. \\
& \quad -\frac{(r-q)\beta r}{|(r-q)\beta|}+(r-q)2\beta\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}+2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right)^2 \\
& \quad -2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right)-\theta^2V^{2\beta}\beta\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right)+\frac{2\theta^2V^{2\beta}\beta^2r}{|(r-q)\beta|}\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right) \\
& \quad \left.-2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|}V^{-2\beta}\right)\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}\right] \\
&= (r-q)V-\left(\frac{wC}{r}+\alpha K\right)\left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right)\left[-\frac{(r-q)\beta r}{|(r-q)\beta|}+2\frac{\beta^2}{|\beta|}\frac{|r-q|r}{|(r-q)\beta|}\right],
\end{aligned}$$

e uma vez que $\beta < 0$ e $(r-q) < 0$,

$$h(V) = (r-q)V-\left(\frac{wC}{r}+\alpha K\right)\left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right)(r) \quad (\text{B.26})$$

➤ Resolvendo a equação (B.23) temos que,

$$\begin{aligned}
i(V) &= -A_1 \left[(r-q)V F''_V(V) + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} F''_{VV}(V) \right] \\
&= -A_1 \left\{ (r-q)V \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \right. \\
&\quad \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V} \phi_{r+g}(V) - \frac{1}{V} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{V} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta+2} \frac{1}{\phi_{r+g}(K)} \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \phi_{r+g}(V) - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} \epsilon \beta \chi(V) \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V) \phi_{r+g}(V) + \frac{1}{V^2} \epsilon^2 \beta^2 \chi(V)^2 \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{V^2} 2\epsilon \beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{V^2} 2\beta \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V) \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{V^2} 2\beta^2 \chi(V)^2 \epsilon \frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{V^2} 4\beta^2 \chi(V)^2 \frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial \chi(V)^2} \frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \phi_{r+g}(V) \right] \left. \right\} \\
&= -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r-q) \left(\beta + \frac{1}{2} \right) - (r-q) \epsilon \beta \chi(V) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(r-q)2\beta\chi(V)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V) \\
& -\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)2\beta\chi(V)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))}-\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V) \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}2\epsilon\beta^2\chi(V)+\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\epsilon^2\beta^2\chi(V)^2 \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}2\epsilon\beta^2\chi(V)^2\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& -\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)2\beta\chi(V)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}4\beta^2\chi(V)\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}2\beta^2\chi(V)^2\epsilon\frac{\partial w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))} \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}4\beta^2\chi(V)^2\frac{\partial^2 w_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)^2}\frac{1}{w_{k.m}(\chi(V))}\Big]
\end{aligned}$$

Quando $\beta < 0$ ²⁴, $w_{k.m}(\chi(V)) = W_{k.m}(\chi(V))$ e de acordo com as equações (13.4.33) e (13.1.31) em Abramowitz e Stegun (1972, página 507 e 505), representadas respetivamente por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V)) - \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)} \\
\frac{\partial^2 W_{k.m}(\chi(V))}{\partial\chi(V)^2} &= \frac{[\chi(V)^2 - 4k\chi(V) + 4m^2 - 1]W_{k.m}(\chi(V))}{4\chi(V)^2}
\end{aligned}$$

Temos então,

$$i(V) = -A_1\left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right)\left\{(r-q)\left(\beta+\frac{1}{2}\right) - (r-q)\epsilon\beta\chi(V)\right.$$

²⁴ Para $\beta > 0$, $w_{k.m}(\chi(V)) = M_{k.m}(\chi(V))$, cujo procedimento é similar ao seguidamente demonstrado.

$$\begin{aligned}
& -(r-q)2\beta\chi(V)\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& +\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V) \\
& -\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\beta\chi(V)\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& -\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V)+\theta^2V^{2\beta}\epsilon\beta^2\chi(V)+\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\epsilon^2\beta^2\chi(V)^2 \\
& +\theta^2V^{2\beta}\epsilon\beta^2\chi(V)^2\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& -\theta^2V^{2\beta}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\beta\chi(V)\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& +2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& +\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2\epsilon\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{\chi(V)}\right)W_{k.m}(\chi(V))-\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{\chi(V)}\right] \\
& +2\theta^2V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2\frac{1}{W_{k.m}(\chi(V))}\left[\frac{(\chi(V)^2-4k\chi(V)+4m^2-1)W_{k.m}(\chi(V))}{4\chi(V)^2}\right]\Big\} \\
& =-A_1\left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right)\left[(r-q)\beta+(r-q)\frac{1}{2}-(r-q)\epsilon\beta\chi(V)\right. \\
& \quad -(r-q)\beta\chi(V)+(r-q)2\beta k+(r-q)2\beta\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}+\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\beta^2-\frac{1}{8}\theta^2V^{2\beta} \\
& \quad -\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V)-\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\beta\chi(V)+\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\beta k \\
& \quad +\theta^2V^{2\beta}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\beta\frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))}-\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\epsilon\beta\chi(V)+\theta^2V^{2\beta}\epsilon\beta^2\chi(V) \\
& \quad \left.+\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\epsilon^2\beta^2\chi(V)^2+\frac{1}{2}\theta^2V^{2\beta}\epsilon\beta^2\chi(V)^2-\theta^2V^{2\beta}\epsilon\beta^2\chi(V)k\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta^2 V^{2\beta} \epsilon \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k \\
& - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 \epsilon - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \epsilon k \\
& - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \epsilon \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 (\chi(V)^2 - 4k\chi(V) + 4m^2 - 1) \Big] \quad (B.27)
\end{aligned}$$

Uma vez que o caso em estudo é $\beta < 0$ e assumindo que:

- $(r - q) > 0$, então $\epsilon = -1$,

$$\begin{aligned}
i(V) = & -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} + (r - q)\beta \chi(V) \right. \\
& - (r - q)\beta \chi(V) + (r - q)2\beta k + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 - \frac{1}{8} \theta^2 V^{2\beta} \\
& + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) - \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \\
& + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k \\
& - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) k \\
& \left. + \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 k \chi(V) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 m^2 - \frac{1}{2} \theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \Big] \\
& = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r-q)\beta + (r-q)\frac{1}{2} + (r-q)2\beta k + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} \right. \\
& \quad \left. + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

Tendo em conta que, neste caso, $k = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{(r+g)}{2|(r-q)\beta|}$

$$\begin{aligned}
i(V) &= -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r-q)\beta + (r-q)\frac{1}{2} + (r-q)2\beta \left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{r+g}{2|(r-q)\beta|} \right] \right. \\
& \quad \left. + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

Tendo em consideração a equação (3.10),

$$\begin{aligned}
i(V) &= -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[-\frac{(r-q)(r+g)\beta}{|(r-q)\beta|} + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} \right. \\
& \quad \left. + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \frac{W_{k+1,m}(\chi(V))}{W_{k,m}(\chi(V))} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2 |\beta|} V^{-2\beta} \right) \right] \\
&= -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[-\frac{(r-q)(r+g)\beta}{|(r-q)\beta|} \right],
\end{aligned}$$

e uma vez que $\beta < 0$ e $(r-q) > 0$,

$$i(V) = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) [-(-1)(r+g)] \quad (\text{B.28})$$

- $(r - q) < 0$, então $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned}
i(V) = & -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} - (r - q)\beta\chi(V) \right. \\
& - (r - q)\beta\chi(V) + (r - q)2\beta k + (r - q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 - \frac{1}{8}\theta^2 V^{2\beta} \\
& - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \\
& + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)k \\
& - \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta\chi(V) + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta k \\
& + \theta^2 V^{2\beta} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 k \\
& - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)k \\
& - \theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 k\chi(V) \\
& \left. + 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 m^2 - \frac{1}{2}\theta^2 V^{2\beta}\beta^2 \right]
\end{aligned}$$

Tendo em conta que, neste caso, $k = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} \right) - \frac{(r+g)}{2|(r-q)\beta|}$

$$\begin{aligned}
i(V) = & -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[(r - q)\beta + (r - q)\frac{1}{2} - 2(r - q)\beta\chi(V) \right. \\
& + 2\beta(r - q) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} - \frac{(r + g)}{2|(r - q)\beta|} \right] + 2\beta(r - q) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \\
& \left. + 2\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V)^2 - 4\theta^2 V^{2\beta}\beta^2\chi(V) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} - \frac{(r + g)}{2|(r - q)\beta|} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \Big] \\
& = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[2\beta(r-q) + (r-q) - 2(r-q)\beta\chi(V) - \frac{(r-q)\beta(r+g)}{|(r-q)\beta|} \right. \\
& \quad + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)^2 - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) - \theta^2 V^{2\beta} \beta \chi(V) \\
& \quad \left. + \frac{2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V)(r+g)}{|(r-q)\beta|} - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \chi(V) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right]
\end{aligned}$$

Tendo em consideração a equação (3.10),

$$\begin{aligned}
i(V) & = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[2\beta(r-q) + (r-q) - 2(r-q)\beta \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right) \right. \\
& \quad - \frac{(r-q)\beta(r+g)}{|(r-q)\beta|} + (r-q)2\beta \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} + 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right)^2 \\
& \quad - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right) - \theta^2 V^{2\beta} \beta \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right) \\
& \quad \left. + \frac{2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 (r+g)}{|(r-q)\beta|} \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right) - 2\theta^2 V^{2\beta} \beta^2 \left(\frac{|r-q|}{\theta^2|\beta|} V^{-2\beta} \right) \frac{W_{k+1.m}(\chi(V))}{W_{k.m}(\chi(V))} \right] \\
& = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) \left[-\frac{(r-q)\beta(r+g)}{|(r-q)\beta|} + 2 \frac{\beta^2}{|\beta|} \frac{|r-q|(r+g)}{|(r-q)\beta|} \right],
\end{aligned}$$

e uma vez que $\beta < 0$ e $(r-q) < 0$,

$$i(V) = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)} \right) (r+g) \quad (\text{B.29})$$

Conclui-se que para $\beta < 0$ e $(r - q) \leq 0$,

$$h(V) = (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) (r),$$

tendo em conta as equações (B.25), (B.26) e

$$i(V) = -A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right) (r + g),$$

tendo em conta as equações (B.28) e (B.29).

Recordando a equação (B.21), temos que:

$$\begin{aligned} rE(g, V, K) &= (r - q)V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) \left(\frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}\right) (r) - A_1 \left(\frac{\phi_{r+g}(V)}{\phi_{r+g}(K)}\right) (r + g) + qV - (1 - w)C \\ &\quad + gD(g, V, K) - g, \end{aligned}$$

e tendo em consideração não só as equações (3.8), (3.16), (3.17), (B.5), como também,

$$Y_r = \frac{\phi_r(V)}{\phi_r(K)}$$

$$P = \frac{p}{g}$$

$$C = \frac{c}{g}$$

então,

$$\begin{aligned} E(g, V, K) &= V - \frac{qV}{r} - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K\right) Y_r - \frac{K(r + g)}{r} Y_{r+g} + \frac{\alpha K(r + g)}{r} Y_{r+g} \\ &\quad + \frac{(C + gP)(r + g)}{(r + g)r} Y_{r+g} + \frac{qV}{r} - \frac{C}{r} + \frac{wC}{r} + \frac{(c + gp)}{(r + g)r} - \frac{(c + gp)}{(r + g)r} Y_{r+g} + \frac{gK}{r} Y_{r+g} \\ &\quad - \frac{g\alpha K}{r} Y_{r+g} - \frac{gP}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) Y_r - KY_{r+g} - \frac{Kg}{r} Y_{r+g} + \alpha KY_{r+g} + \frac{\alpha Kg}{r} Y_{r+g} + \frac{(C + gP)}{r + g} Y_{r+g} \\
&\quad + \frac{(C + gP)g}{(r + g)r} Y_{r+g} - \frac{C}{r} + \frac{wC}{r} + \frac{c + gp}{(r + g)r} - \frac{(c + gp)}{(r + g)r} Y_{r+g} + \frac{gK}{r} Y_{r+g} - \frac{g\alpha K}{r} Y_{r+g} \\
&\quad - \frac{gP}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) Y_r - KY_{r+g} + \alpha KY_{r+g} + \frac{(C + gP)}{r + g} Y_{r+g} \\
&\quad + \frac{(-Cr - Cg + c + gp - gPr - gPg)}{(r + g)r} + \frac{wC}{r} \\
&= V - \left(\frac{wC}{r} + \alpha K \right) Y_r - KY_{r+g} + \alpha KY_{r+g} + \frac{(C + gP)}{r + g} Y_{r+g} - \frac{(C + gP)r}{(r + g)r} + \frac{wC}{r}
\end{aligned}$$

$$E(g, V, K) = V + \frac{wC}{r} [1 - Y_r] - \alpha KY_r - \left[\frac{C + gP}{r + g} + \left((1 - \alpha)K - \frac{C + gP}{r + g} \right) Y_{r+g} \right]$$

□

C. Código em *Python 3.6 (Spyder)*

C.1. Estrutura da dívida estacionária baseada em Leland (1994b)

a. Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa

“Closedformsolutions_L.py”

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM DE Leland (1994b)
#ARTIGO "BOND PRICES, YIELD SPREADS, AND OPTIMAL CAPITAL STRUCTURE WITH
DEFAULT RISK"
```

#Variáveis:

#V: valor dos ativos da empresa

#K: barreira de default endógena

#C: valor de cupão

#P: valor nominal da dívida

#r: taxa de juro s/risco

#q: taxa de payout

#w: corporate tax rate

#sigma: volatilidade do valor dos ativos da empresa

#alpha: custos de falência

#g: taxa de amortização

#T: maturidade média da dívida $T=1/g$

#Na presente dissertação definida pela equação 2.13

```
def y(r,q,sigma,alpha,g):
    return ((r-q-0.5*(sigma**2))+(((r-q-0.5*(sigma**2))**2)+2*(g+r)*\
        (sigma**2))**0.5)/(sigma**2)
```

#Igual à função y mas tendo em conta que $g=0$

```
def x(r,q,sigma,alpha):
    return ((r-q-0.5*(sigma**2))+(((r-q-0.5*(sigma**2))**2)+2*r*\
        (sigma**2))**0.5)/(sigma**2)
```

#Na presente dissertação definida pela equação 2.15

```
def debt(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return ((C+g*P)/(r+g))*(1-((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g)))+(1-alpha)*\
        K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)*\
        ((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g)))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.19
def vfirm(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return V+((w*C)/r)*(1-((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -x(r,q,sigma,alpha)))-(alpha*\
        K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)*\
        ((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**x(r,q,sigma,alpha)))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.21
def equity(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return V+((w*C)/r)*(1-((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -x(r,q,sigma,alpha)))-(alpha*\
        K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)*\
        ((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -x(r,q,sigma,alpha))-((C+g*P)/(r+g))*\
        (1-((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g)))-((1-alpha)*\
        K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)*\
        ((V/K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g))))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.23
def K(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return (((C+g*P)*y(r,q,sigma,alpha,g))/(r+g))- \
        ((w*C*x(r,q,sigma,alpha))/r)/(1+alpha*x(r,q,sigma,alpha))+ \
        (1-alpha)*y(r,q,sigma,alpha,g))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 4.1
def leverage(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return (debt(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)/\
        vfirm(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))*100
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 4.2
def creditspread(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V):
    return ((C/debt(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))-r)*10000
```

b. Figura 4.1

“Fig1_L.py”

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.1 - para o caso em que o valor dos

```

#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função da
#maturidade média da dívida

from Closedformsolutions_L import K, debt
import scipy.optimize as opt

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.15
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

def get_y_axis_lel():
    g_list = [1/i for i in range (1,21,1)]
    T_list=[i for i in range (1,21,1)]

    solutions = []

    def f(variables,*inputs):
        c=variables #c=cupão
        P,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
        eq1=debt(c,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)-P
        return eq1

    for i in range(len(g_list)):
        g = g_list[i]
        r=0.08
        V=100
        sigma=0.2
        alpha=0.5
        w=0.35
        q=0.06
        P=50
        inputs=(P,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
        solution=list(opt.fsolve(f, 5, args=inputs)) #Foi atribuído o valor de
        #5 ao starting point do cupão
        solution.append(K(solution[0],g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))
        solutions.append(solution)

    axis_x = [T_list[i] for i in range(len(T_list))] #corresponde à maturidade
    #média da dívida
    axis_y = [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))] #corresponde à
    #barreira de default endógena

    return axis_y

```

c. Figura 4.2

“Fig2_L.py”

```
#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.2 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função do rácio
#de alavancagem para T=5 e T=20
```

```
from Closedformsolutions_L import leverage, K, debt
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
```

```
#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.15
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
```

```
def f(variables,*inputs):
    p=variables #p = valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,g,p,r,q,sigma,alpha,w,V)-p
    return eq1
```

```
#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K e leverage dado um intervalo de possiveis valores
#para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step de 0.001
```

```
def get_leland_axis(g):
```

```
    C_list=np.arange(0,30,0.001)
    solutions = []
```

```
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        r=0.08
        V=100
        sigma=0.2
        alpha=0.5
        w=0.35
        q=0.06
        inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
        solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuido o valor de 50
        #ao starting point do valor nominal da dívida
```

```

solution.append(K(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
solution.append(leverage(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
solutions.append(solution)

return [[solutions[i][2] for i in range(len(solutions))], [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))]]

```

d. Figura 4.3

“Fig3_L.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.3 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Representação do valor total de uma empresa em função do rácio
#de alavancagem para T=1, T=10 e T=20

```

```

from Closedformsolutions_L import vfirm, leverage, debt
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

```

```

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.15
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

```

```

def f(variables,*inputs):
    p=variables #p = valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,g,p,r,q,sigma,alpha,w,V)-p
    return eq1

```

```

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K, vfirm e leverage dado um intervalo de possíveis valores
#para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step de 0.001

```

```

def get_ileland_axis(g):
    C_list=np.arange(0,30,0.001)
    solutions = []

```

```

    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]

```

```

r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuido o valor de 50
#ao starting point do valor nominal da dívida
solution.append(vfirm(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
solution.append(leverage(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
solutions.append(solution)

return [[solutions[i][2] for i in range(len(solutions))], [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))]]

```

e. Tabela 4.1 Painel B, Tabela 4.2 e Tabela D.1

“Tabela1B&2&D1_L.py”

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL B, A TABELA 4.2 E A TABELA D.1 - para o caso em que o valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo GBM

#Objetivo: TABELA 4.1 - Determinar os valores de spread de crédito tendo em
#conta uma barreira determinada endogenamente e TABELA 4.2 - Determinar o valor
#da barreira de default tendo em conta diferentes maturidades e diferentes
#valores nominais da dívida

```

from Closedformsolutions_L import creditspread, debt, K
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

```

#Eq1: $D(V_0; C; P) = P$; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.15
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo que o cupão C seja determinado

```

def f(variables,*inputs):
    c=variables #c = cupão
    P,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(c,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V)-P
    return eq1

```

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos

```

T=input('Maturidade Média da Dívida: ')

if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06

P_list=[40,50,60] #3 Cenários de valores nominais da dívida
creditspread_list = []
K_list=[]
C_list=[]

#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo a seguir apresentado irá calcular o valor de cupão, o valor da
#barreira de default endógena e o valor de spread de crédito, tendo em conta 3
#cenários diferentes de maturidade e de valores nominais da dívida

for i in range(len(P_list)):
    P = P_list[i]
    inputs=(P,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
    solution=list(opt.fsolve(f, 5, args=inputs)) #Foi atribuido o valor de 5
    #ao starting point do cupão
    creditspread_list.append(creditspread(solution[0],g,P,r,q,sigma,\
                                         alpha,w,V))
    K_list.append(K(solution[0],g,P,r,q,sigma,alpha,w,V))
    C_list.append(solution[0])

print(np.around(creditspread_list[:,2]))
#Este print irá apresentar o credit spread associado a um valor nominal da
#dívida de 40, 50 e 60 para um determinada T

print(np.around(K_list[:,2]))
#Este print irá apresentar os valores da barreira de default endógena
#associados a um valor nominal de 40, 50 e 60 para um determinado T

```

```
print(np.around(C_list[:,2])) #Tabela apresentada no Anexo D
#Este print irá apresentar os valores de cupão associados a um valor nominal
#de 40, 50 e 60 para um determinado T
```

f. Tabela 4.1 Painel A

“Tabela1A_L.py”

```
#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL A - para o caso em que o
#valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Determinar os valores de credit spread tendo em conta que o valor da
#da barreira exógena e o valor dos cupões são os mesmos que os da barreira
#endógena para quando beta é igual a 0, para um mesmo P e T
```

```
import numpy as np
from Closedformsolutions_L import y
```

```
#Determinar o valor da dívida tendo em conta que o valor da barreira exógena
#é igual ao valor da barreira endógena para quando o beta=0
def debt_exogenous(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V,K):
    return ((C+g*P)/(r+g))*(1-((V/K)**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g)))+(1-alpha)*K*((V/K)**\
        -y(r,q,sigma,alpha,g)))
```

```
#Determinar o valor de credit spread tendo em conta a equação da debt_exogenous
def creditspread_exogenous(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V,K):
    return ((C/debt_exogenous(C,g,P,r,q,sigma,alpha,w,V,K))-r)*10000
```

```
#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo abaixo apresentado irá calcular o valor de spread de crédito tendo
#em conta os valores da barreira de default endógena e cupões determinados
#para quando beta=0, tendo em conta 3 cenários diferentes de maturidade e de
#valores nominais da dívida
```

```
r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
```



```
P_list=[40,50,60] #3 Cenários de valores nominais da dívida
```

```
#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
```

```
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos
```

```
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
```

```
if T=='infinito':
```

```
    g=0
```

```
else:
```

```
    g=float(1/float(T))
```

```
#Os valores seguidamente apresentados foram os recolhidos aquando a análise
```

```
#da barreira de default endógena quando beta=0 e T= 1, 5 e 10
```

```
#Para T=1:
```

```
if g==1:
```

```
    K_list=[46.8443550467929, 58.4333263462996, 69.601956796761584]
```

```
    C_list=[3.2683030249257157, 4.44147967272379, 6.84039216878199]
```

```
#Para T=5:
```

```
elif g==1/5:
```

```
    K_list=[31.54085218037255, 39.6148499222488, 47.9693160004453]
```

```
    C_list=[3.291683171381298, 4.27301354251393, 5.48968539861061]
```

```
#Para T=10
```

```
elif g==1/10:
```

```
    K_list=[26.49207822839963, 33.381078338479348, 40.586863636105761]
```

```
    C_list=[3.2912345851872082, 4.23163463385402, 5.31208708122570]
```

```
creditsread_list = []
```

```
for i in range(len(P_list)):
```

```
    P = P_list[i]
```

```
    C = C_list[i]
```

```
    K = K_list[i]
```

```
    creditsread_list.append(creditsread_exogenous(C,g,P,r,q,sigma,\n                                                    alpha,w,V,K))
```

```
print(np.around(creditsread_list[:,2]))
```

```
#O array acima ira apresentar o credit spread associado a um valor nominal de
```

```
#40, 50 e 60 para uma determinada maturidade
```

g. Tabela 4.3

“Tabela3_L.py”

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.3 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM

#Objetivo: Determinar os características ótimas de empresas alavancadas para
#o valor máximo de v

```
from Closedformsolutions_L import vfirm, leverage, equity, K, creditspread, \
debt
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
```

#Eq1: $D(V_0; C; P) = P$; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.15
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

```
def f(variables,*inputs):
    p=variables #p=valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,g,p,r,q,sigma,alpha,w,V)-p
    return eq1
```

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P , K , v_{firm} e $leverage$, $equity$ e $creditspread$ dado um intervalo
#de possíveis valores para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step
#de 0.001

```
C_list=np.arange(0,30,0.001)
solutions = []
```

```
#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos, para o caso de ser de 10 anos ou infinito
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))
```

```

for i in range(len(C_list)):
    C=C_list[i]
    r=0.08
    V=100
    sigma=0.2
    alpha=0.5
    w=0.35
    q=0.06
    inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
    solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuido o valor de 50
    #ao starting point do valor nominal da dívida
    solution.append(vfirm(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
    solution.append(leverage(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
    solution.append(equity(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
    solution.append(K(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
    solution.append(creditspread(C,g,solution[0],r,q,sigma,alpha,w,V))
    solutions.append(solution)

#Para determinar o vfirm máximo e os restantes parametros ótimos

vfirm = [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))] # tentar extrair
#apenas o 2º elemento de todas as listas que corresponde ao valor total da
#empresa

C=[C_list[i] for i in range(len(C_list))] #apresentar uma lista com todos os
#valores de cupão considerados

max_index_vfirm = vfirm.index(max(vfirm)) # encontrar o índice do valor máximo
#do valor total da empresa

C_optimal = np.around(C[vfirm.index(max(vfirm))],2) #encontrar o valor do cupão
#correspondente ao valor máximo do valor total da empresa

lista_parameters=np.around(solutions[max_index_vfirm][:,2) #extrair os
#valores dos parametros correspondentes ao valor máximo do valor total da
#empresa --> dados em forma de array

lista_parameters_total = np.append(lista_parameters, C_optimal) #acrescentar
#ao array acima o valor ótimo do cupão para o valor total da empresa
#correspondente

print(lista_parameters_total)
#array corresponde as características ótimas de uma empresa alavancada
#tendo em conta o valor máximo do valor total da empresa
#[debt, vfirm, leverage, equity, K, creditspread, cupão]

```

C.2. Estrutura da dívida estacionária baseada em Davydov e Linetsky (2001)

a. Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa

“Closedformexpressions_DL.py”

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM DAVYDOV E LINETSKY (2001)
#ARTIGO "Pricing and Hedging Path-Dependent Options Under the CEV Process"
```

```
#Variáveis:
```

```
#V: valor dos ativos da empresa
```

```
#K: barreira de default endógena
```

```
#C: valor de cupão
```

```
#P: valor nominal da dívida
```

```
#r: taxa de juro s/risco
```

```
#q: taxa de payout
```

```
#w: corporate tax rate
```

```
#sigma: volatilidade do valor dos ativos da empresa
```

```
#alpha: custos de falência
```

```
#g: taxa de amortização
```

```
#T: maturidade média da dívida  $T=1/g$ 
```

```
from math import sqrt
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.28
```

```
def gama_r(r,q,sigma):
```

```
    return -(((r-q)/(sigma**2))-0.5)-sqrt((((r-q)/(sigma**2))-0.5)**2)+\
        ((2*r)/(sigma**2)))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.28
```

```
def gama_rg(r,q,sigma,g):
```

```
    return (-(((r-q)/(sigma**2))-0.5)-sqrt((((r-q)/(sigma**2))-0.5)**2)+\
        ((2*(r+g))/(sigma**2))))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.27
```

```
def phi_r_V(V,r,q,sigma):
```

```
    return V**gama_r(r,q,sigma)
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 2.27
```

```

def phi_r_K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)**gama_r(r,q,sigma)

#Na presente dissertação definida pela equação 2.27
def phi_rg_V(V,r,q,sigma,g):
    return V**gama_rg(r,q,sigma,g)

#Na presente dissertação definida pela equação 2.27
def phi_rg_K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)**gama_rg(r,q,sigma,g)

def Y_r(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return phi_r_V(V,r,q,sigma)/phi_r_K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)

#Igual à função Y_r só que em vez de se basear em phi_r passa a basear-se em
#phi_rg
def Y_rg(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return phi_rg_V(V,r,q,sigma,g)/phi_rg_K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)

#Na presente dissertação definida pela equação 2.36
def debt(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return ((C+g*P)/(r+g))*(1-Y_rg(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))+((1-alpha)*\
        K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)*Y_rg(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))

#Na presente dissertação definida pela equação 2.38
def equity(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return V+((w*C)/r)*(1-Y_r(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))-(alpha*\
        K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)*Y_r(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))-\\
        (((C+(g*P))/(r+g))+(((1-alpha)*K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)))-\\
        ((C+(g*P))/(r+g)))*Y_rg(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))

#Na presente dissertação definida pela equação 2.37
def vfirm(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return V+((w*C)/r)*(1-Y_r(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))-(alpha*\
        K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)*Y_r(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))

#Na presente dissertação definida pela equação 2.39
def K(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):
    return (((C+(g*P))/(r+g))*gama_rg(r,q,sigma,g))-(((w*C)/r)*\
        gama_r(r,q,sigma)))/(-1+(alpha*gama_r(r,q,sigma))+((1-alpha)*\

```

```
gama_rg(r,q,sigma,g)))
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 4.1
```

```
def leverage(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):  
    return (debt(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)/\  
            vfirm(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))*100
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 4.2
```

```
def creditspread(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w):  
    return ((C/debt(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))-r)*10000
```

b. Figura 4.1

“Fig1_DL.py”

```
#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.1 - para o caso em que o valor dos  
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM  
#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função da  
#maturidade média da dívida
```

```
from Closedformexpressions_DL import debt, K  
import scipy.optimize as opt
```

```
def get_y_axis_dav():  
    g_list = [1/i for i in range (1,21,1)]  
    T_list=[i for i in range (1,21,1)] #Maturidade média da dívida é o  
    #inverso da taxa de amortização (equação 2.8)  
    solutions = []
```

```
#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.36  
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor  
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
```

```
def f(variables,*inputs):  
    c=variables #c=cupão  
    P,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs  
    eq1=debt(c,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)-P  
    return eq1
```

```
for i in range(len(g_list)):
```

```

g = g_list[i]
r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
P=50
inputs=(P,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
solution=list(opt.fsolve(f, 5, args=inputs)) #Foi atribuido o valor
#de 5 ao starting point do cupão
solution.append(K(solution[0],alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))
solutions.append(solution)

axis_x = [T_list[i] for i in range(len(T_list))] #corresponde à maturidade
#média da dívida
axis_y = [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))] # corresponde à
#barreira de default endógena
return axis_y

```

c. Figura 4.2

“Fig2_DL.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.2 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função do rácio
#de alavancagem para T=5 e T=20

```

```

from Closedformexpressions_DL import debt, leverage, K
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

```

```

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.36
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

```

```

def f(variables,*inputs):
    p=variables #p=valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,alpha,p,V,r,q,sigma,g,w)-p
    return eq1

```

```

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K e leverage dado um intervalo de possiveis valores
#para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step de 0.001

def get_davydov_axis(g):
    C_list=np.arange(0,30,0.001)
    solutions = []

    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        r=0.08
        V=100
        sigma=0.2
        alpha=0.5
        w=0.35
        q=0.06
        inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
        solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuído o valor
        #de 50 ao starting point do valor nominal da dívida
        solution.append(K(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
        solution.append(leverage(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
        solutions.append(solution)

    return [[solutions[i][2] for i in range(len(solutions))], [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))]]

```

d. Figura 4.3

“Fig3_DL.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.3 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Representação do valor total de uma empresa em função do rácio
#de alavancagem para T=1, T=10 e T=20

```

```

from Closedformexpressions_DL import debt, vfirm, leverage
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

```

```

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.36
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor

```


#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

```
def f(variables,*inputs):
    p=variables #p=valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,alpha,p,V,r,q,sigma,g,w)-p
    return eq1
```

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K, vfirm e leverage dado um intervalo de possiveis valores
#para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step de 0.001

```
def get_davydov_axis(g):
    C_list=np.arange(0,30,0.001)
    solutions = []

    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        r=0.08
        V=100
        sigma=0.2
        alpha=0.5
        w=0.35
        q=0.06
        inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
        solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuído o valor
        #de 50 ao starting point do valor nominal da dívida
        solution.append(vfirm(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
        solution.append(leverage(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
        solutions.append(solution)

    return [[solutions[i][2] for i in range(len(solutions))], [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))]]
```

e. Tabela 4.1 Painel B, Tabela 4.2 e Tabela D.1

“Tabela1B&2&D1_DL.py”

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL B, A TABELA 4.2 E TABELA D.1 - para o caso em que o valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: TABELA 4.1 - Determinar os valores de spread de crédito tendo em

```
#conta uma barreira determinada endogenamente e TABELA 4.2 - Determinar o valor
#da barreira de default tendo em conta diferentes maturidades e diferentes
#valores nominais da dívida
```

```
from Closedformexpressions_DL import debt, creditspread, K
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
```

```
#Eq1:  $D(V_0; C; P) = P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.36
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
```

```
def f(variables,*inputs):
    c=variables #c=cupão
    P,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(c,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w)-P
    return eq1
```

```
P_list=[40,50,60] #3 Cenários de valores nominais da dívida
creditspread_list = []
K_list=[]
C_list=[]
```

```
#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
```

```
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))
```

```
#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo a seguir apresentado irá calcular o valor de cupão, o valor da
#barreira de default endógena e o valor de spread de crédito, tendo em conta 3
#cenários diferentes de maturidade e de valores nominais da dívida
```

```
for i in range(len(P_list)):
    P=P_list[i]
    r=0.08
    V=100
```

```

sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
inputs=(P,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
solution=list(opt.fsolve(f, 5, args=inputs)) #Foi atribuido o valor
#de 5 ao starting point do cupão
creditspread_list.append(creditspread(solution[0],alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))
K_list.append(K(solution[0],alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))
C_list.append(solution[0])

print(np.around(creditspread_list[:,2]))
#Este print irá apresentar o credit spread associado a um valor nominal da
#dívida de 40, 50 e 60 para um determinado T

print(np.around(K_list[:,2]))
#Este print irá apresentar os valores da barreira de default endógena
#associados a um valor nominal de 40, 50 e 60 para um determinado T

print(np.around(C_list[:,2])) #Tabela apresentada no Anexo D
#Este print irá apresentar os valores de cupão associados a um valor nominal
#de 40, 50 e 60 para um determinado T

```

f. Tabela 4.1 Painel A

“Tabela1A_DL.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL A - para o caso em que o
#valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Determinar os valores de credit spread tendo em conta que o valor da
#da barreira exógena e o valor dos cupões são os mesmos que os da barreira
#endógena para quando beta é igual a 0, para um mesmo P e T

```

```

from Closedformexpressions_DL import creditspread
import numpy as np

```

```

#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo abaixo apresentado irá calcular o valor de spread de crédito tendo
#em conta os valores da barreira de default endógena e cupões determinados
#para quando beta=0, tendo em conta 3 cenários diferentes de maturidade e de
#valores nominais da dívida

```

```

r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06

```

```

P_list=[40,50,60] #3 Cenários de valores nominais da dívida

```

```

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

```

```

#Os valores seguidamente apresentados foram os recolhidas aquando a análise
#da barreira de default endógena quando beta=0 e T= 1, 5 e 10

```

```

#Para T=1:
if g==1:
    K_list=[46.8443550467929, 58.4333263462996, 69.601956796761584]
    C_list=[3.2683030249257157, 4.44147967272379, 6.84039216878199]

```

```

#Para T=5:
elif g==1/5:
    K_list=[31.54085218037255, 39.6148499222488, 47.9693160004453]
    C_list=[3.291683171381298, 4.27301354251393, 5.48968539861061]

```

```

#Para T=10
elif g==1/10:
    K_list=[26.49207822839963, 33.381078338479348, 40.586863636105761]
    C_list=[3.2912345851872082, 4.23163463385402, 5.31208708122570]

```

```

creditspread_list = []

```

```

for i in range(len(P_list)):
    P = P_list[i]
    C = C_list[i]
    K = K_list[i]

```

```

creditspread_list.append(creditspread(C,alpha,P,V,r,q,sigma,g,w))

print(np.around(creditspread_list[:,2])
#Este print irá apresentar o credit spread associado a um valor nominal de 40,
#50 e 60 para uma determinada maturidade

```

g. Tabela 4.3

“Tabela3_DL.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.3 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo GBM
#Objetivo: Determinar os características ótimas de empresas alavancadas para
#o valor máximo de v

```

```

from Closedformexpressions_DL import debt, equity, vfirm, creditspread, \
leverage, K
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

```

```

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 2.36
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado

```

```

def f(variables,*inputs):
    p=variables #p=valor nominal da dívida
    C,g,r,V,sigma,alpha,w,q=inputs
    eq1=debt(C,alpha,p,V,r,q,sigma,g,w)-p
    return eq1

```

```

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K, vfirm e leverage, equity e creditspread dado um intervalo
#de possiveis valores para o valor de cupão que irá desde 0 a 30 com um step
#de 0.001

```

```

C_list=np.arange(0,30,0.001)
solutions = []

```

```

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos, para o caso de ser de 10 anos ou infinito
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

for i in range(len(C_list)):
    C=C_list[i]
    r=0.08
    V=100
    sigma=0.2
    alpha=0.5
    w=0.35
    q=0.06
    inputs=(C,g,r,V,sigma,alpha,w,q)
    solution=list(opt.fsolve(f, 50, args=inputs)) #Foi atribuido o valor
    #de 50 ao starting point do valor nominal da dívida
    solution.append(vfirm(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
    solution.append(leverage(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
    solution.append(equity(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
    solution.append(creditspread(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,\
                                g,w))
    solution.append(K(C,alpha,solution[0],V,r,q,sigma,g,w))
    solutions.append(solution)

#Para determinar o vfirm máximo e os restantes parametros ótimos

vfirm = [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))] # tentar extrair
#apenas o 2º elemento de todas as listas que corresponde ao valor total
#da empresa

C=[C_list[i] for i in range(len(C_list))] #apresentar uma lista com todos os
#valores de cupão considerados

max_index_vfirm = vfirm.index(max(vfirm)) # encontrar o índice do valor máximo
#do valor total da empresa

C_optimal = np.around(C[vfirm.index(max(vfirm))],2) #encontrar o valor do cupão
#correspondente ao valor máximo do valor total da empresa

lista_parameters=np.around(solutions[max_index_vfirm][:],2) #extrair os

```

```
#restantes parametros correspondentes ao valor máximo do valor total da  
#empresa --> dados em forma de array
```

```
lista_parameters_total = np.append(lista_parameters, C_optimal) #acrescentar  
#ao array acima o valor ótimo do cupão para o valor total da empresa  
#correspondente
```

```
print(lista_parameters_total)  
#array corresponde as características ótimas de uma empresa alavancada  
#tendo em conta o valor máximo da valor total da empresa  
#[debt, vfirm, leverage, equity, creditspread, K, cupão]
```

C.3. Estrutura da dívida estacionária baseada em Perrakis e Zhong (2015)

a. Soluções de fórmula fechada dos componentes de uma empresa

“myWhittakerFunctions.py”

```
import mpmath as mpm
```

```
#Funções de Whittaker  
def myWhittakerW(a,b,z):
```

```
    y=mpm.exp(-1/2*z)*z**(1/2+b)*mpm.hyperu(1/2+b-a,1+2*b,z)
```

```
    return float(y.real)
```

```
def myWhittakerM(a,b,z):
```

```
    return mpm.exp(-1/2*z)*z**(1/2+b)*mpm.hyp1f1(1/2+b-a,1+2*b,z)
```

“Lema1_PZ.py”

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM PERRAKIS E ZHONG (2015)  
#ARTIGO "CREDIT SPREADS AND STATE-DEPENDENT VOLATILITY: THEORY AND  
EMPIRICAL EVIDENCE"
```

```
#As fórmulas seguidamente apresentadas baseiam-se no Lema 1 da página 17 da  
#presente dissertação
```

```

#Variáveis:
#V: valor dos ativos da empresa
#K: barreira de default endógena
#C: valor de cupão
#P: valor nominal da dívida
#r: taxa de juro s/risco
#q: taxa de payout
#w: corporate tax rate
#sigma: volatilidade do valor dos ativos da empresa
#alpha: custos de falência
#g: taxa de amortização
#T: maturidade média da dívida  $T=1/g$ 

```

```

from myWhittakerFunctions import myWhittakerW, myWhittakerM
import mpmath as mp

```

```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.10
#Equação x em função de V
def x_fun_V(V,beta,theta,r,q):
    return ((abs(r-q))/((theta**2)*abs(beta)))*(V**(-2*beta))

```

```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.10
#Equação x em função de K
def x_fun_K(K,beta,theta,r,q):
    if beta>0:
        y=((abs(r-q))/((theta**2)*abs(beta)))*(1.0/(K**(2*beta)))
    elif beta<0:
        y=((abs(r-q))/((theta**2)*abs(beta)))*(K**(-2*beta))
    return float(y)

```

```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.11
def epsilon_fun(beta,r,q):
    if (beta*(r-q)) > 0:
        y = 1
    elif (beta*(r-q)) < 0:
        y = -1
    return y

```

```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.12
def m_fun(beta):
    return 1/(4*abs(beta))

```



```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.13
#Equação k em função de r
def k_fun(beta,r,q):
    return (epsilon_fun(beta,r,q)*(0.5+(1/(4*beta))))-(r/(2*abs((r-q)*beta)))

#Na presente dissertação definida pela equação 3.13
#Equação k em função de r+g
def k_fun_rg(beta,r,q,g):
    return (epsilon_fun(beta,r,q)*(0.5+(1/(4*beta))))-((r+g)/(2*abs((r-q)*beta)))

#Derivada da função x em ordem a K
def der_x_fun_K(K,beta,theta,r,q):
    if beta>0:
        y=((abs(r-q))/((theta**2)*abs(beta)))*(1.0/(K**((2*beta)+1)))*(-2*beta)
    elif beta<0:
        y=((abs(r-q))/((theta**2)*abs(beta)))*(K**((-2*beta)-1))*(-2*beta)
    return y

#Na presente dissertação definida pela equação 3.9
#Função de phi_r em relação a V
def phi_r_V(V,beta,theta,r,q):
    if beta<0 and (r-q)!=0:
        return V**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_V(V,beta,theta,r,q))*myWhittakerW(k_fun(beta,r,q),\
            m_fun(beta),x_fun_V(V,beta,theta,r,q))

    elif beta>0 and (r-q)!=0:
        return V**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_V(V,beta,theta,r,q))*myWhittakerM(k_fun(beta,r,q),\
            m_fun(beta),x_fun_V(V,beta,theta,r,q))

#Na presente dissertação definida pela equação 3.9
#Função de phi_r em relação a K
def phi_r_K(K,beta,theta,r,q):
    if beta<0 and (r-q)!=0:
        return K**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*myWhittakerW(k_fun(beta,r,q),\
            m_fun(beta),x_fun_K(K,beta,theta,r,q))

    elif beta>0 and (r-q)!=0:
        return K**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*myWhittakerM(k_fun(beta,r,q),\
            m_fun(beta),x_fun_K(K,beta,theta,r,q))

```

```

#Na presente dissertação definida pela equação 3.9
#Função de phi_rg em relação a V
def phi_rg_V(V,beta,theta,r,q,g):
    if beta<0 and (r-q)!=0:
        return V**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_V(V,beta,theta,r,q))*myWhittakerW(\
                k_fun_rg(beta,r,q,g),m_fun(beta),\
                x_fun_V(V,beta,theta,r,q))

    elif beta>0 and (r-q)!=0:
        return V**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_V(V,beta,theta,r,q))*myWhittakerM(\
                k_fun_rg(beta,r,q,g),m_fun(beta),\
                x_fun_V(V,beta,theta,r,q))

#Na presente dissertação definida pela equação 3.9
#Função de phi_rg em relação a K
def phi_rg_K(K,beta,theta,r,q,g):
    if beta<0 and (r-q)!=0:
        return K**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*myWhittakerW(\
                k_fun_rg(beta,r,q,g),m_fun(beta),\
                x_fun_K(K,beta,theta,r,q))

    elif beta>0 and (r-q)!=0:
        return K**(beta+0.5)*mp.exp((epsilon_fun(beta,r,q)/2)*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*myWhittakerM(\
                k_fun_rg(beta,r,q,g),m_fun(beta),\
                x_fun_K(K,beta,theta,r,q))

#Na presente dissertação definida pela equação 3.8
def Y_fun_r(V,K,beta,theta,r,q):
    try:
        y=phi_r_V(V,beta,theta,r,q)/phi_r_K(K,beta,theta,r,q)
    except ZeroDivisionError:
        y=0
    return float(y)

#Na presente dissertação definida pela equação 3.8
#Função Y_rg
def Y_fun_rg(V,K,beta,theta,r,q,g):
    try:
        y=phi_rg_V(V,beta,theta,r,q,g)/phi_rg_K(K,beta,theta,r,q,g)
    except ZeroDivisionError:
        y=0

```

```
return float(y)
```

“Lema2_PZ.py”

```
from Lema1_PZ import Y_fun_rg
```

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM PERRAKIS E ZHONG (2015)
#ARTIGO "CREDIT SPREADS AND STATE-DEPENDENT VOLATILITY: THEORY AND
EMPIRICAL EVIDENCE"
```

```
#As fórmulas seguidamente apresentadas baseiam-se no Lema 2 da página 19 da
#presente dissertação
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 3.18
def Debt(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha):
    return (((C+(g*P))/(r+g))*(1-(Y_fun_rg(V,K,beta,theta,r,q,g))))+\
    ((1-alpha)*K*Y_fun_rg(V,K,beta,theta,r,q,g))
```

“Lema3_PZ.py”

```
from Lema1_PZ import Y_fun_r,Y_fun_rg
```

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM PERRAKIS E ZHONG (2015)
#ARTIGO "CREDIT SPREADS AND STATE-DEPENDENT VOLATILITY: THEORY AND
EMPIRICAL EVIDENCE"
```

```
#As fórmulas seguidamente apresentadas baseiam-se no Lema 3 da página 22 da
#presente dissertação
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 3.22
def equity(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha,w):
    return V+(((w*C)/r)*(1-Y_fun_r(V,K,beta,theta,r,q)))-(alpha*K*\
Y_fun_r(V,K,beta,theta,r,q))-(((C+(g*P))/(r+g))+(((1-alpha)*K-((C+(g*P))/(r+g))))*\
Y_fun_rg(V,K,beta,theta,r,q,g)))
```

“Proposicao1_PZ.py”

```
from myWhittakerFunctions import myWhittakerW, myWhittakerM
from Lema1_PZ import x_fun_K, epsilon_fun, m_fun, k_fun, k_fun_rg, der_x_fun_K
```

```
#ESTRUTURA DA DÍVIDA ESTACIONÁRIA BASEADA EM PERRAKIS E ZHONG (2015)
#ARTIGO "CREDIT SPREADS AND STATE-DEPENDENT VOLATILITY: THEORY AND
EMPIRICAL EVIDENCE"
```

```
#As fórmulas seguidamente apresentadas baseiam-se na Proposição 1 da página 24
#da presente dissertação
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 3.25
```

```
def der_phi_r(K,beta,theta,r,q):
    if beta<0:
        y=((beta+0.5)/K)+((0.5*epsilon_fun(beta,r,q))+0.5-\
            (k_fun(beta,r,q)/x_fun_K(K,beta,theta,r,q))- \
            (myWhittakerW(k_fun(beta,r,q)+1,m_fun(beta),\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))/(myWhittakerW(k_fun(beta,r,q),\
            m_fun(beta),x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))))*\
            der_x_fun_K(K,beta,theta,r,q)
    elif beta>0:
        try:
            y=((beta+0.5)/K)+((0.5*epsilon_fun(beta,r,q))+0.5-\
                (k_fun(beta,r,q)/x_fun_K(K,beta,theta,r,q))+ \
                ((myWhittakerM(k_fun(beta,r,q)+1,m_fun(beta),\
                x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*(k_fun(beta,r,q)+0.5+m_fun(beta)))\
                (myWhittakerM(k_fun(beta,r,q),m_fun(beta),\
                x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*x_fun_K(K,beta,theta,r,q))))*\
                der_x_fun_K(K,beta,theta,r,q)
        except ZeroDivisionError:
            y=0
    return float(y)
```

```
#Na presente dissertação definida pela equação 3.25
```

```
def der_phi_rg(K,beta,theta,r,q,g):
    if beta<0:
        y=((beta+0.5)/K)+((0.5*epsilon_fun(beta,r,q))+0.5-\
            (k_fun_rg(beta,r,q,g)/x_fun_K(K,beta,theta,r,q))- \
            (myWhittakerW(k_fun_rg(beta,r,q,g)+1,m_fun(beta),\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))/(myWhittakerW(k_fun_rg(beta,r,q,g),\
            m_fun(beta),x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*\
            x_fun_K(K,beta,theta,r,q))))*\
            der_x_fun_K(K,beta,theta,r,q)
    elif beta>0:
```

```

try:
    y=((beta+0.5)/K)+((0.5*epsilon_fun(beta,r,q))+0.5-\
    (k_fun_rg(beta,r,q,g)/x_fun_K(K,beta,theta,r,q))+\
    ((myWhittakerM(k_fun_rg(beta,r,q,g)+1,m_fun(beta),\
    x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*(k_fun_rg(beta,r,q,g)+0.5+\
    m_fun(beta)))/(myWhittakerM(k_fun_rg(beta,r,q,g),m_fun(beta),\
    x_fun_K(K,beta,theta,r,q))*x_fun_K(K,beta,theta,r,q))))*\
    der_x_fun_K(K,beta,theta,r,q)
except ZeroDivisionError:
    y=0
return float(y)

```

“Formulas_PZ.py”

```

from Lema1_PZ import Y_fun_r
from Lema2_PZ import Debt

#Na presente dissertação definida pela equação 3.23
def vfirm(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha,w):
    return V+((w*C)/r)*(1-Y_fun_r(V,K,beta,theta,r,q))- \
    (alpha*K*Y_fun_r(V,K,beta,theta,r,q))

#Na presente dissertação definida pela equação 4.1
def leverage(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha,w):
    return (Debt(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha)/\
    vfirm(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha,w))*100

#Na presente dissertação definida pela equação 4.2
def creditspread(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha):
    return ((C/Debt(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha))-r)*10000

```

b. Figura 4.1

“Fig1_PZ.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.1 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo CEV
#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função da
#maturidade média da dívida

```

```

from Lema2_PZ import Debt
from Proposicao1_PZ import der_phi_r, der_phi_rg
import scipy.optimize as opt
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from Fig1_L import get_y_axis_lcl
from Fig1_DL import get_y_axis_dav

#Eq1:  $D(V_0; C; P) = P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 3.18
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
#Eq2: Na presente dissertação definida pela equação 3.24

def f(variables,*inputs):
    (c,k)=variables #c=cupão e k= barreira de default endógena
    V,beta,sigma,r,q,g,P,alpha,w,theta=inputs
    eq1=Debt(V,k,beta,theta,r,q,g,c,P,alpha)-P
    eq2=1-((((w*c)/r)+alpha*k)*der_phi_r(k,beta,theta,r,q))+((((c+(g*P))/\
        (r+g))-(1-alpha)*k)*der_phi_rg(k,beta,theta,r,q,g))
    return [eq1,eq2]

axis_y=[]

for beta in [-1, -0.5, 0.5, 1]:
    r=0.08
    V=100
    sigma=0.2
    alpha=0.5
    w=0.35
    q=0.06
    P=50
    theta=sigma/(V**beta)

    g_list = [1/i for i in range (1,21,1)]
    T_list=[i for i in range (1,21,1)]

    solutions = []

    for i in range(len(g_list)):
        g = g_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,P,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (5,30), args=inputs)) #Foi atribuido o valor

```

```

#de 5 ao starting point de c e 30 a k
solutions.append(solution)

axis1_y = [solutions[i][1] for i in range(len(solutions))]
axis_y.append(axis1_y)

axis_x = [T_list[i] for i in range(len(T_list))] #corresponde à maturidade
#média da dívida

leland = get_y_axis_lcl()
davydov = get_y_axis_dav()

plt.rcParams["font.family"] = "serif"
plt.rcParams["font.serif"] = "Times New Roman"

plt.rcParams['xtick.labelsize']=14
plt.rcParams['ytick.labelsize']=14

plt.plot(axis_x, axis_y[0], '-', color='green')
plt.plot(axis_x, axis_y[1], '-', color='red')
plt.plot(axis_x, axis_y[2], '-', color='orange')
plt.plot(axis_x, axis_y[3], '-', color='blue')
plt.plot(axis_x, leland, '-', color='black')
plt.plot(axis_x, davydov, 'o', color='purple')
plt.ylim(0,70)
plt.xticks(np.arange(0, 20+0.01, 2.0))
plt.xlabel('Maturidade média da dívida (anos)', fontsize=14)
plt.ylabel('Barreira de default endógena (dólares)', fontsize=14)
plt.gcf().set_size_inches(12, 6)
plt.legend(['\u03B2 = -1', '\u03B2 = -0,5', "\u03B2 = 0,5", "\u03B2 = 1", "\u03B2 = 0 (L)", "\u03B2
= 0 (DL)"], loc='upper right', frameon=False, fontsize='large')
plt.savefig("Fig1.svg", bbox_inches='tight')
plt.show()

```

c. Figura 4.2

“Fig2_PZ.py”

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A FIGURA 4.2 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo CEV

#Objetivo: Representação da barreira de default endógena em função do rácio
#de alavancagem para T=5 e T=20

```
from Lema2_PZ import Debt
from Proposicao1_PZ import der_phi_r, der_phi_rg
from Formulas_PZ import vfirm, leverage
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from Fig2_L import get_leland_axis
from Fig2_DL import get_davydov_axis
```

#Eq1: $D(V_0; C; P) = P$; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 3.18
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
#Eq2: Na presente dissertação definida pela equação 3.24

```
def f(variables,*inputs):
    (p,k)=variables #p=valor nominal da dívida; k= barreira de default endógena
    V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta=inputs
    eq1=Debt(V,k,beta,theta,r,q,g,C,p,alpha)-p
    eq2=1-((((w*C)/r)+alpha*k)*der_phi_r(k,beta,theta,r,q))+((((C+(g*p))/\
        (r+g))-(1-alpha)*k)*der_phi_rg(k,beta,theta,r,q,g))
    return [eq1,eq2]
```

```
axis_x = []
axis_y = []
```

```
#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 5 anos ou para o
#caso de ser de 20 anos
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))
```

```
#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular o
#valores de P, K, vfirm e leverage dado um intervalo de possiveis valores
#para o valor de cupão que irá desde 0.01 a 10 com um step de 0.1
```



```

for beta in [-1, -0.5, 0.5, 1]:
    r=0.08
    V=100
    sigma=0.2
    alpha=0.5
    w=0.35
    q=0.06
    theta=sigma/(V**beta)

    C_list=np.arange(0.01,10,0.1)
    solutions = []

    if beta==1 and g==1/5:
        for i in range(len(C_list)):
            C=C_list[i]
            inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
            solution=list(opt.fsolve(f, (14,0.5), args=inputs)) #Foi atribuído o
            #valor de 14 ao starting point de p e 0.5 a k
            solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
            solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
            solutions.append(solution)

    elif beta==1 and g==1/20:
        for i in range(len(C_list)):
            C=C_list[i]
            inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
            solution=list(opt.fsolve(f, (14,3), args=inputs)) #Foi atribuído o
            #valor de 14 ao starting point de p e 3 a k
            solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
            solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
            solutions.append(solution)

    elif beta==0.5:
        for i in range(len(C_list)):
            C=C_list[i]
            inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
            solution=list(opt.fsolve(f, (8,3), args=inputs)) #Foi atribuído o valor
            #de 8 ao starting point de p e 3 a k
            solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
            solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\

```

```

        alpha,w))
    solutions.append(solution)

elif beta==0.5:
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (2,2), args=inputs)) #Foi atribuído o valor
        #de 2 ao starting point de p e 2 a k
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
            alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
            alpha,w))
        solutions.append(solution)

elif beta==1:
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (2,0.01), args=inputs)) #Foi atribuído
        #o valor de 2 ao starting point de p e 0.01 a k
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
            alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
            alpha,w))
        solutions.append(solution)

axis_x.append([solutions[i][3] for i in range(len(solutions))])
axis_y.append([solutions[i][1] for i in range(len(solutions))])

axis_x.append(get_leland_axis(g)[0])
axis_x.append(get_davydov_axis(g)[0])
axis_y.append(get_leland_axis(g)[1])
axis_y.append(get_davydov_axis(g)[1])

plt.plot(axis_x[0], axis_y[0], '-', color='green')
plt.plot(axis_x[1], axis_y[1], '-', color='red')
plt.plot(axis_x[2], axis_y[2], '-', color='orange')
plt.plot(axis_x[3], axis_y[3], '-', color='blue')
plt.plot(axis_x[4], axis_y[4], '-', color='black')
plt.plot(axis_x[5], axis_y[5], '--', color='pink')

plt.rcParams["font.family"] = "serif"
plt.rcParams["font.serif"] = "Times New Roman"

```



```

V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta=inputs
eq1=Debt(V,k,beta,theta,r,q,g,C,p,alpha)-p
eq2=1-((((w*C)/r)+alpha*k)*der_phi_r(k,beta,theta,r,q))+((((C+(g*p))/\
(r+g))-(1-alpha)*k)*der_phi_rg(k,beta,theta,r,q,g))
return [eq1,eq2]

axis_x = []
axis_y = []

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 10 anos ou para o caso de ser de 20
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular os valores
#nominais da dívida e de K (através do fsolve) e os valores de leverage e
#vfirm para um dado intervalo de possíveis valores de cupão que está,
#seguidamente, definido de acordo com o beta em questão

for beta in [-0.5, 0.5]:
    r=0.08
    V=100
    sigma=0.2
    alpha=0.5
    w=0.35
    q=0.06
    theta=sigma/(V**beta)

    solutions = []

    if beta==0.5 and g==1: #quando beta=0.5 e g=1
        C_list=np.arange(0,5,0.1) #Intervalo do cupao: de 0 a 5 com step de 0.1
        for i in range(len(C_list)):
            C=C_list[i]
            inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
            solution=list(opt.fsolve(f, (13,2), args=inputs)) #Foi atribuido o
            #valor de 13 ao starting point do principle e 2 à default boundary
            solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
alpha,w))

```

```

        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solutions.append(solution)

elif beta==0.5 and g!=1: #quando beta=0.5 e g=1/10; 1/20
    C_list=np.arange(0,20,0.1) #Intervalo do cupao: de 0 a 20 com step de 0.1
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (8,2), args=inputs)) #Foi atribuido o valor
        #de 8 ao starting point do principle e 2 à default boundary
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solutions.append(solution)

elif beta!=0.5 and g==1: #quando beta=-0.5 e g=1
    C_list=np.arange(0,10,0.1) #Intervalo do cupao: de 0 a 10 com step de 0.1
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (2,1), args=inputs)) #Foi atribuido o valor
        #de 2 ao starting point do principle e 1 à default boundary
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solutions.append(solution)

elif beta!=0.5 and g!=1: #quando beta=-0.5 e g=1/10; 1/20
    C_list=np.arange(0,20,0.1) #Intervalo do cupao: de 0 a 20 com step de 0.1
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (2,1), args=inputs)) #Foi atribuido o valor
        #de 2 ao starting point do principle e 1 à default boundary
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                alpha,w))
        solutions.append(solution)

axis_x.append([solutions[i][3] for i in range(len(solutions))])

```

```

axis_y.append([solutions[i][2] for i in range(len(solutions))])

axis_x.append(get_leland_axis(g)[0])
axis_x.append(get_davydov_axis(g)[0])
axis_y.append(get_leland_axis(g)[1])
axis_y.append(get_davydov_axis(g)[1])

plt.plot(axis_x[0], axis_y[0], '-', color='red')
plt.plot(axis_x[1], axis_y[1], '-', color='orange')
plt.plot(axis_x[2], axis_y[2], '-', color='black')
plt.plot(axis_x[3], axis_y[3], '--', color='pink')

plt.rcParams["font.family"] = "serif"
plt.rcParams["font.serif"] = "Times New Roman"

plt.rcParams['xtick.labelsize']=14
plt.rcParams['ytick.labelsize']=14

plt.ylim(100,125)
plt.xlim(0,100)
plt.locator_params(axis='x', nbins=10)
plt.title("T={ }".format(T), fontsize=14)
plt.xlabel('R  cio de alavancagem (%)', fontsize=14)
plt.ylabel('Valor total de uma empresa (  lares)', fontsize=14)
plt.gcf().set_size_inches(12, 6)
plt.legend(['         = -0,5', "         = 0,5", "         = 0 (L)", "         = 0 (DL)"], loc='upper right',
frameon=False, fontsize='large')
plt.savefig("Fig3={ }".format(T)+".svg", bbox_inches='tight')
plt.show()

```

e. Tabela 4.1 Painel B e Tabela 4.2

“Tabela1B&2_PZ.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL B E A TABELA 4.2 - para o
caso em que o valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo CEV
#Objetivo: TABELA 4.1 - Determinar os valores de spread de crédito tendo em
#conta uma barreira determinada endogenamente e TABELA 4.2 - Determinar o valor
#da barreira de default tendo em conta diferentes maturidades e diferentes
#valores nominais da dívida

```

```

from Proposicao1_PZ import der_phi_r, der_phi_rg
from Formulas_PZ import creditspread
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
from fractions import Fraction

#Eq1: Na presente dissertação definida pela equação 3.24

def f(variables,*inputs):
    k=variables #k= barreira de default endógena
    C,P,g,r,V,sigma,alpha,w,q,beta,theta=inputs
    eq1=1-((((w*C)/r)+alpha*k)*der_phi_r(k,beta,theta,r,q))+((((C+(g*P))/\
        (r+g))-(1-alpha)*k)*der_phi_rg(k,beta,theta,r,q,g))
    return eq1

#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo abaixo apresentado irá calcular o valor de spread de crédito tendo
#em conta os valor dos diferentes cupões determinados para quando beta=0, os
#3 diferentes cenários de maturidade e de valores nominais da dívida

r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
beta=float(Fraction(input('Valor de beta: '))) #Beta=1;-0.5;-1
theta=sigma/(V**beta)

P_list=[40,50,60] #3 Cenários de valores nominais da dívida
creditspread_list = []
K_list=[]

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')

if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

```

```

#Os valores seguidamente apresentados foram os recolhidos aquando a análise
#da barreira de default endógena quando beta=0 e T= 1, 5 e 10
#Para T=1:
if g==1:
    C_list=[3.2683030249257157, 4.44147967272379, 6.84039216878199]

#Para T=5:
elif g==1/5:
    C_list=[3.291683171381298, 4.27301354251393, 5.48968539861061]

#Para T=10
elif g==1/10:
    C_list=[3.2912345851872082, 4.23163463385402, 5.31208708122570]

for i in range(len(P_list)):
    P = P_list[i]
    C = C_list[i]
    inputs=(C,P,g,r,V,sigma,alpha,w,q,beta,theta)
    solution=list(opt.fsolve(f, 30, args=inputs)) #foi atribuido o
    #valor de 30 ao starting point de k
    creditspread_list.append(creditspread(V,solution[0],beta,theta,r,q,g,\
                                     C,P,alpha))
    K_list.append(solution[0])

cs=creditspread_list[:]
creditspread=[float(x) for x in cs]

k=K_list[:]
K_values=[float(x) for x in k]

print(np.around(creditspread,2))
#O array acima ira apresentar o credit spread associado a um valor nominal de
#40, 50 e 60 para uma determinada maturidade

print(np.around(K_values,2))
#O array acima ira apresentar os valores da barreira de default endógena
#associado a um valor nominal de 40, 50 e 60 para uma determinada maturidade

```


f. Tabela 4.1 Painel A

“Tabela1A _PZ.py”

```
#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.1 PAINEL A - para o caso em que o
#valor dos ativos de uma empresa segue o Modelo CEV
#Objetivo: Determinar os valores de credit spread tendo em conta que o valor da
#da barreira exógena e o valor dos cupões são os mesmos que os da barreira
#endógena para quando beta é igual a 0, para um mesmo P e T
```

```
from Formulas_PZ import creditspread
import numpy as np
from fractions import Fraction
```

```
#Tendo em conta os valores definidos na pagina 28 da presente dissertação,
#o ciclo abaixo apresentado irá calcular o valor de spread de crédito tendo
#em conta os valores da barreira de default endógena e cupões determinados
#para quando beta=0, tendo em conta 3 cenários diferentes de maturidade e de
#valores nominais da dívida
```

```
r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
beta=float(Fraction(input('Valor de beta: '))) #Beta=1;-0.5;-1
theta=sigma/(V**beta)
```

```
P_list=[40,50,60]
```

```
#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos ou para o caso de ser de 10 anos
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))
```

```
#Os valores seguidamente apresentados foram os recolhidos aquando a análise
#da barreira de default endógena quando beta=0 e T= 1, 5 e 10
#Para T=1:
```

```

if g==1:
    K_list=[46.8443550467929, 58.4333263462996, 69.601956796761584]
    C_list=[3.2683030249257157, 4.44147967272379, 6.84039216878199]

#Para T=5:
elif g==1/5:
    K_list=[31.54085218037255, 39.6148499222488, 47.9693160004453]
    C_list=[3.291683171381298, 4.27301354251393, 5.48968539861061]

#Para T=10
elif g==1/10:
    K_list=[26.49207822839963, 33.381078338479348, 40.586863636105761]
    C_list=[3.2912345851872082, 4.23163463385402, 5.31208708122570]

creditspread_list = []

for i in range(len(P_list)):
    P = P_list[i]
    C = C_list[i]
    K = K_list[i]
    creditspread_list.append(creditspread(V,K,beta,theta,r,q,g,C,P,alpha))

cs=creditspread_list[:]
creditspread=[float(x) for x in cs]

print(np.around(creditspread,2))
#O array acima ira apresentar o credit spread associado a um valor nominal de
#40, 50 e 60 para uma determinada maturidade

```

g. Tabela 4.3

“Tabela3 _PZ.py”

```

#SCRIPT USADO PARA DETERMINAR A TABELA 4.3 - para o caso em que o valor dos
#ativos de uma empresa segue o Modelo CEV
#Objetivo: Determinar as características ótimas de empresas alavancadas para
#o valor máximo de v

```

```

from Lema2_PZ import Debt
from Lema3_PZ import equity
from Proposicao1_PZ import der_phi_r, der_phi_rg
from Formulas_PZ import vfirm, leverage, creditspread
import scipy.optimize as opt
import numpy as np
from fractions import Fraction

#Eq1:  $D(V_0;C;P)=P$ ; Uma vez que a dívida é emitida ao par, a equação 3.18
#que é definida como o valor de mercado da dívida, será igualada ao seu valor
#nominal de modo a que o cupão C seja determinado
#Eq2: Na presente dissertação definida pela equação 3.24

def f(variables,*inputs):
    (p,k)=variables #p=valor nominal da dívida; k= barreira de default endógena
    V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta=inputs
    eq1=Debt(V,k,beta,theta,r,q,g,C,p,alpha)-p
    eq2=1-((((w*C)/r)+alpha*k)*der_phi_r(k,beta,theta,r,q))+((((C+(g*p))/\
        (r+g))-(1-alpha)*k)*der_phi_rg(k,beta,theta,r,q,g))
    return [eq1,eq2]

#Tendo em conta os valores definidos para os diversos parametros na página 28
#da presente dissertação, o ciclo a seguir apresentado irá calcular os valores
#de P e K (através do fsolve) e os valores de vfirm, leverage, equity
#e creditspread para um dado intervalo de possíveis valores de cupão que irá
#ser diferente consoante o beta em questão

r=0.08
V=100
sigma=0.2
alpha=0.5
w=0.35
q=0.06
beta=float(Fraction(input('Valor de beta: '))) #Beta=-1; -0.5; 1;
theta=sigma/(V**beta)

#Correr o script para o caso da maturidade da dívida ser de 1 ano, para o
#caso de ser de 5 anos, para o caso de ser de 10 anos ou infinito
T=input('Maturidade Média da Dívida: ')
if T=='infinito':
    g=0
else:
    g=float(1/float(T))

```

```

solutions = []

if beta==1 and g==1:
    C_list=np.arange(0,4,0.01) #Intervalo do cupão: de 0 a 4 com step de 0.01
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (20,2), args=inputs)) #Foi atribuído o
        #valor de 20 ao starting point de p e 2 a k
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],
                             alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                 alpha,w))
        solution.append(equity(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                               alpha,w))
        solution.append(creditspread(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,
                                     solution[0],alpha))
        solutions.append(solution)

elif beta==1 and g!=1:
    C_list=np.arange(0,5,0.01) #Intervalo do cupão: de 0 a 5 com step de 0.01
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (20,2), args=inputs)) #Foi atribuído o
        #valor de 20 ao starting point de p e 2 a k
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],
                             alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                 alpha,w))
        solution.append(equity(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                               alpha,w))
        solution.append(creditspread(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,
                                     solution[0],alpha))
        solutions.append(solution)

elif beta!=1: #para beta=-1 e beta=-0.5
    C_list=np.arange(0,10,0.01) #Intervalo do cupão: de 0 a 10 com step de 0.01
    for i in range(len(C_list)):
        C=C_list[i]
        inputs=(V,beta,sigma,r,q,g,C,alpha,w,theta)
        solution=list(opt.fsolve(f, (20,2), args=inputs)) #Foi atribuído o
        #valor de 20 ao starting point de p e 2 a k
        solution.append(vfirm(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],
                             alpha,w))
        solution.append(leverage(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
                                 alpha,w))

```

```

        alpha,w))
    solution.append(equity(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,solution[0],\
        alpha,w))
    solution.append(creditspread(V,solution[1],beta,theta,r,q,g,C,
        solution[0],alpha))
    solutions.append(solution)

```

#Para determinar o vfirm maximo e os restantes parametros ótimos

vfirm = [s[2] for s in solutions] #tentar extrair apenas o 3º elemento de todas
#as listas que corresponde ao valor total da empresa

C=C_list[:] #apresentar uma lista com todos os valores de cupão considerados

max_index_vfirm = vfirm.index(max(vfirm)) # encontrar o índice do valor máximo
#do valor total da empresa

C_optimal = np.around(C[vfirm.index(max(vfirm))],2) #encontrar o valor do cupão
#correspondente ao valor máximo do valor total da empresa

sol=solutions[max_index_vfirm] #selecionar de toda a lista de soluções, a
#linha correspondente ao valor maximo total da empresa

s =[float(x) for x in sol] #transformar todos os elementos da lista anterior
#em floats

lista_parameters=np.around(s[:,2) #arredondar todos os floats da lista
#anterior a 2 casas decimais e apresentar os valores num array

lista_parameters_total = np.append(lista_parameters, C_optimal) #acrescentar
#ao array acima o valor ótimo do cupão para o valor total da empresa
#correspondente

print(lista_parameters_total) #array corresponde as características ótimas
#de uma empresa alavancada tendo em conta o valor máximo do valor total da
#empresa
#[debt, K, vfirm, leverage, equity, creditspread, cupão]

D. Valor do cupão para o caso de $\beta = 0$ ²⁵

Tabela D.1: Valor do cupão para o caso de $\beta = 0$ quando a barreira de *default* é determinada endogenamente, em função do valor nominal da dívida $P = \{40, 50, 60\}$ e para $T = \{1, 5, 10\}$. Os restantes parâmetros foram assumidos como: $V_0 = V = 100$, $r = 8\%$, $q = 6\%$, $w = 35\%$, $\alpha = 50\%$ e $\sigma_0 = \sigma = 20\%$.

P	40	50	60
1 ano de maturidade média	3,27	4,44	6,84
5 anos de maturidade média	3,29	4,27	5,49
10 anos de maturidade média	3,29	4,23	5,31

²⁵ Resultados iguais quer pela implementação do modelo de Leland (1994b), quer pela implementação do modelo de Davydov e Linetsky (2001).